

۱- در یک مستطیل، خط‌هایی از دو رأس مقابل بر یک قطر عمود می‌شوند و آن قطر را به سه قسمت طوری تقسیم می‌کنند که قسمت وسط دو برابر هر یک از قسمت‌های کناری است. مساحت این مستطیل چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ایجاد شده در مستطیل است؟

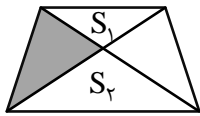
۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۴ (۱)

۲- در ذوزنقه مقابل،  $\frac{S_2}{S_1} = 9$  است. مساحت مثلث رنگ شده چه کسری از مساحت کل است؟

 $\frac{3}{16}$  (۲) $\frac{1}{16}$  (۱) $\frac{5}{16}$  (۴) $\frac{1}{4}$  (۳)

۳- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر ایجاد می‌کند،  $\frac{3}{6}$  و  $\frac{6}{4}$  است. محیط مثلث کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۸ (۳)

۳۲ (۲)

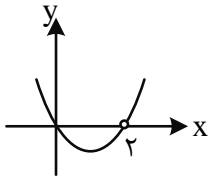
۳۶ (۱)

۴- دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + (b-a)x + 4b}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{a, b\}$  است. مقدار  $b$  کدام است؟

 $\frac{2}{3}$  (۴) $-\frac{2}{3}$  (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)



۵- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax^2 - ax + c}{x + b}$  به صورت مقابل است.  $a + b$  کدام است؟

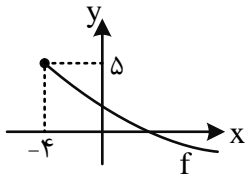
- (۱) -۴  
(۲) -۶  
(۳) -۸  
(۴) -۱۰

۶- برد تابع  $f(x) = x + \frac{9}{x}$  با دامنه  $(0, +\infty)$  برابر با  $[a, +\infty)$  است.  $f(a)$  کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۶/۵  
(۳) ۷  
(۴) ۷/۵

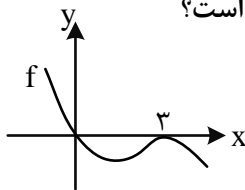
۷- دامنه توابع  $f(x) = \sqrt{\Delta x - x^2} - 4$  و  $g(x) = \sqrt{b - |x - a|}$  برابر هستند.  $ab$  کدام است؟ ( $b > 0$ )

- (۱)  $\frac{15}{4}$   
(۲)  $\frac{15}{2}$   
(۳)  $\frac{5}{4}$   
(۴)  $\frac{5}{2}$



۸- نمودار تابع  $f(x) = a - \sqrt{x + b}$  به صورت مقابل است.  $f^{-1}(3)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) صفر  
(۳) ۲  
(۴) ۴



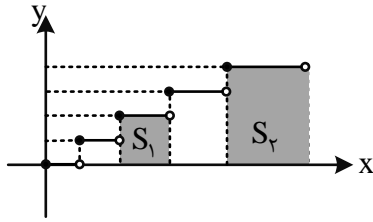
۹- نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x^2 - 3x}}$  شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی شمار

۱۰- مجموع جواب‌های معادله  $[x - 2] + [3 - x] = 2x + 5$  کدام است؟

- (۱) -۳  
(۲) -۳/۵  
(۳) -۴  
(۴) -۴/۵

۱۱- نمودار تابع  $y = \lceil \sqrt{x} \rceil$  در بازه  $[0, 25]$  به صورت مقابل رسم شده است. اگر مساحت مستطیل‌های رنگی  $S_1$  و  $S_2$



باشند، مقدار  $S_2 - S_1$  کدام است؟

۲۴ (۱)      ۲۶ (۲)

۲۸ (۳)      ۳۲ (۴)

۱۲- کدام یک از توابع داده شده یک به یک است؟

(۱)  $y = x^3 - x$       (۲)  $y = x \lceil x \rceil$       (۳)  $y = x^3 + x$       (۴)  $y = x - |x|$

۱۳- اگر  $f(x) = x + 2\sqrt{x}$  و  $g(x) = |x| - 5x$  باشند، مقدار  $g^{-1}(f^{-1}(15))$  کدام است؟

(۱)  $-1/5$       (۲)  $-2/25$       (۳)  $-2/5$       (۴)  $-3$

۱۴- با فرض  $f(x) = \frac{ax+1}{3x-2}$ ، تابع  $y = a + f(x)$  و وارون آن بر هم منطبق هستند.  $a$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $2$       (۴)  $-2$

۱۵- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x - \frac{1}{8x}$  با دامنه  $(0, +\infty)$  مفروض است. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز ناحیه دوم را با کدام عرض

قطع می‌کند؟

(۱)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $-\frac{1}{2}$       (۳)  $-\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۶- قرینه نمودار تابع  $f(x) = 3x + |x|$  نسبت به خط  $y = x$  به صورت  $g(x) = ax + b|x|$  است.  $5a - b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$       (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

۱۷- تابع  $f(x) = x^2 - 2x$  با دامنه  $(1, +\infty)$  مفروض است. قرینه نمودار این تابع نسبت به محور  $x$ ها را  $16$  واحد به سمت

بالا منتقل می‌کنیم. فاصله نقطه برخورد تابع جدید و تابع اولیه از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{5}$       (۲)  $3\sqrt{5}$       (۳)  $4\sqrt{5}$       (۴)  $6\sqrt{15}$

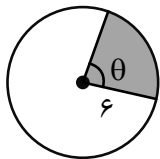
۱۸- اگر  $f(x) = \begin{cases} 5-x & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 1 \\ x+1 & x \leq 1 \end{cases}$  باشند، برد تابع  $(f+g)(x)$  شامل چند عدد صحیح نیست؟

- (۱) ۶      (۲) ۵      (۳) ۴      (۴) ۳

۱۹- زاویه  $\frac{\pi}{5}^\circ$  چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{\pi^2}{900}$       (۲)  $\frac{\pi^2}{600}$       (۳) ۳۶      (۴) ۲۴

۲۰- در شکل مقابل، مساحت و محیط ناحیه رنگی اندازه یکسان دارند. کدام رابطه درست است؟

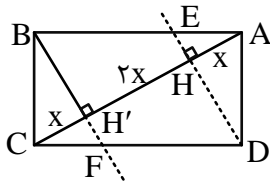


- (۱)  $\sin 3\theta < \sin 2\theta < \sin \theta$       (۲)  $\sin 2\theta < \sin \theta < \sin 3\theta$   
 (۳)  $\sin 3\theta < \sin \theta < \sin 2\theta$       (۴)  $\sin \theta < \sin 2\theta < \sin 3\theta$

# پاسخنامه

## ۱- پاسخ: گزینه ۱

یک شکل به صورت مقابل برای مسئله در نظر می‌گیریم:



$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\triangle AEH}} = \frac{2(\cancel{x} \times BH' \times AC)}{\cancel{x} \times EH \times AH} = \frac{2 \times BH' \times 4x}{EH \times x} = 8 \times \frac{BH'}{EH}$$

خواسته مسئله  $\rightarrow 8 \times 3 = 24$

تالس:  $\frac{AH}{AH'} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{x}{3x} = \frac{EH}{BH'} \Rightarrow \frac{BH'}{EH} = 3$

## ۲- پاسخ: گزینه ۲

مساحت بخش‌های مختلف در دوزنقه به صورت مقابل است:

$$\frac{b^2}{a^2} = 9 \Rightarrow \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow b = 3a$$

$b = 3a \rightarrow$

$$\frac{3a^2}{16a^2} = \frac{3}{16}$$

## ۳- پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل مقابل، داریم:

$$b^2 = 3/6 \times 10 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$c^2 = 6/4 \times 10 = 64 \Rightarrow c = 8$$

$a = 10$

در نتیجه محیط مستطیل برابر با  $10 + 6 + 8 = 24$  است.

## ۴- پاسخ: گزینه ۳

a و b ریشه‌های مخرج کسر هستند. به کمک روابط بین ریشه‌های معادله می‌توان نوشت:

$$ab = \frac{4b}{2} \Rightarrow ab = 2b \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{a-b}{2} = a+b \xrightarrow{a=2} \frac{2-b}{2} = 2+b \Rightarrow 2-b = 4+2b \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow b = \frac{-2}{3}$$

## ۵- پاسخ: گزینه ۲

$x = 2$  هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج است و چون تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، می‌توان نوشت:

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$8 + 4a - 2a + c = 0 \xrightarrow{c=0} 2a = -8 \Rightarrow a = -4$$

در آخر  $a + b = -4 + (-2) = -6$  است.

۶- پاسخ: گزینه‌ی ۴

می‌دانیم برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  همواره  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  است، پس داریم:

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \left(\frac{9}{x}\right)} \Rightarrow x + \frac{9}{x} \geq 6 \Rightarrow R_f = [6, +\infty) \Rightarrow a = 6$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$f(6) = 6 + \frac{9}{6} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

۷- پاسخ: گزینه‌ی ۱

دامنه توابع داده شده برابر هستند. پس داریم:

$$\Delta x - x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - \Delta x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq x \leq 4$$

$$b - |x - a| \geq 0 \Rightarrow |x - a| \leq b \xrightarrow{b > 0} -b \leq x - a \leq b \xrightarrow{+a} a - b \leq x \leq a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 4 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$$

در آخر خواسته مسئله  $ab = \frac{15}{4}$  است.

۸- پاسخ: گزینه‌ی ۲

دامنه تابع  $(-4, +\infty)$  و برد تابع  $(-\infty, 5]$  است، پس ضابطه تابع برابر با  $f(x) = 5 - \sqrt{x+4}$  است و برای به دست آوردن مقدار  $f^{-1}(3)$  می‌توان نوشت:

$$f(x) = 3 \Rightarrow 5 - \sqrt{x+4} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+4} = 2 \Rightarrow x+4 = 4 \Rightarrow x = 0$$

۹- پاسخ: گزینه‌ی ۳

باید مجموعه جواب نامعادله  $\frac{f(x)}{x^2 - 3x} \geq 0$  را به دست آوریم. داریم:

	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$
$\frac{f(x)}{x(x-3)} \geq 0$	+	+	-	-
	+	+	-	+
	+	+	-	
		ت.ن	ت.ن	

دامنه تابع به صورت  $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$  است که شامل ۲ عدد طبیعی  $\{1, 2\}$  است.

۱۰- پاسخ: گزینه‌ی ۴

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$[x-2] + [3-x] = 2x + 5 \Rightarrow [x] - 2 + 3 + [-x] = 2x + 5 \Rightarrow [x] + [-x] = 2x + 4$$

حالا برای به دست آوردن جواب‌های معادله می‌توان نوشت:

$$x \notin \mathbb{Z} : -1 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \checkmark$$

$$x \in \mathbb{Z} : 0 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \checkmark$$

در نتیجه مجموع جواب‌های معادله  $-\frac{5}{2} - 2 = -\frac{9}{2} = -4.5$  است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

نمودار تابع را رسم می‌کنیم و مقادیر  $S_1$  و  $S_2$  را محاسبه می‌کنیم. داریم:

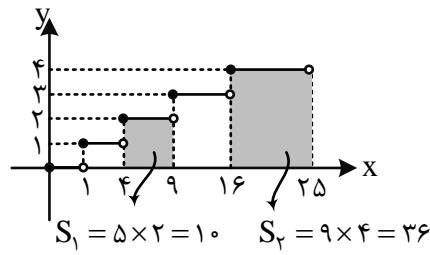
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 0$$

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$



در آخر  $S_2 - S_1 = 26$  است.

۱۲- پاسخ: گزینه ۳

در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) به ازای یک  $y$ ، چند مقدار برای  $x$  وجود دارد، پس یک‌به‌یک نیستند:

$$1 \text{ گزینه } y=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$2 \text{ گزینه } y=0 \Rightarrow x[x]=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

⋮

$$4 \text{ گزینه } y=0 \Rightarrow x=|x| \Rightarrow x \geq 0$$

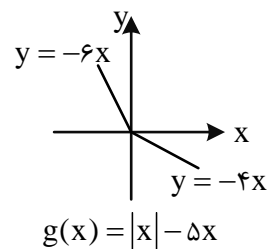
۱۳- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا مقدار  $f^{-1}(15)$  را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(15) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 15 \Rightarrow \alpha + 2\sqrt{\alpha} = 15 \xrightarrow{\text{حدس}} \alpha = 9$$

در نتیجه باید  $g^{-1}(9)$  را محاسبه کنیم که برای محاسبه آن می‌توان نوشت:

$$g(x) = \begin{cases} -6x & x < 0 \\ -4x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -6x = 9 \Rightarrow x = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2} = -1.5$$



۱۴- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ضابطه تابع  $y = a + f(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$y = a + f(x) = a + \frac{ax+1}{3x-2} = \frac{3ax - 2a + ax + 1}{3x-2} = \frac{4ax - 2a + 1}{3x-2}$$

تابع به دست آمده و وارون آن بر هم منطبق هستند، پس داریم:

$$4a + (-2) = 0 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

### ۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۴

باید جواب معادله  $f^{-1}(x) = -x$  را به دست آوریم، پس داریم:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{1}{8x} = x \Rightarrow 2x = \frac{1}{8x} \Rightarrow 16x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} A\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

### ۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases} \quad \text{ضابطه } f \text{ به صورت } f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

و در نتیجه ضابطه وارون آن  $g(x)$  است و می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0: ax + bx = \frac{x}{4} \Rightarrow a + b = \frac{1}{4} \\ x < 0: ax - bx = \frac{x}{2} \Rightarrow a - b = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{8}, b = -\frac{1}{8}$$

$$\Delta a - b = \frac{15}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{16}{8} = 2$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

### ۱۷- پاسخ: گزینه‌ی ۳

ابتدا ضابطه تابع جدید را به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = 2x - x^2 \xrightarrow{16 \text{ واحد به بالا}} y = 2x - x^2 + 16$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$x^2 - 2x = 2x - x^2 + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه برخورد } A(4, 8)$$

$$\xrightarrow{\text{فاصله از مبدأ}} OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

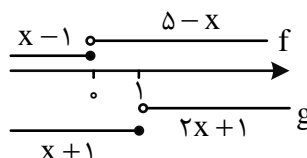
### ۱۸- پاسخ: گزینه‌ی ۱

ضابطه  $(f+g)(x)$  را به دست می‌آوریم:

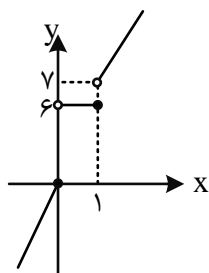
$$x \leq 0 \Rightarrow (f+g)(x) = x - 1 + x + 1 = 2x$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow (f+g)(x) = 5 - x + x + 1 = 6$$

$$x > 1 \Rightarrow (f+g)(x) = 5 - x + 2x + 1 = x + 6$$







در نتیجه نمودار  $(f + g)(x)$  به صورت زیر است:

در نتیجه برد تابع شامل ۶ عدد صحیح ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۷ نیست.

**۱۹- پاسخ: گزینه‌ی ۱**

برای تبدیل درجه به رادیان آن را در  $\frac{\pi}{180}$  ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\pi}{5} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi^2}{900}$$

**۲۰- پاسخ: گزینه‌ی ۳**

اندازه مساحت و محیط ناحیه رنگی برابر هستند، پس داریم:

$$\frac{1}{2}(\pi)^2 \theta = \pi \theta + 12 \Rightarrow 18\theta = \pi \theta + 12 \Rightarrow 12\theta = 12 \Rightarrow \theta = 1 \text{ rad} \approx 57^\circ$$

