

۱- نمودار $y = 1 - f\left(4 - \frac{x}{3}\right)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و ۸ واحد به راست و یک واحد به بالا انتقال داده‌ایم.

شکل حاصل با کدام تغییر بر نمودار f منطبق خواهد شد؟

(۱) انبساط افقی

(۲) انقباض افقی

(۳) بازتاب نسبت به محور عرض‌ها

(۴) بازتاب نسبت به محور طول‌ها

۲- نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 7$ را نسبت به خط $x = -2$ بازتاب کرده و ۴ واحد به راست انتقال داده‌ایم. تابع به

دست آمده در کدام بازه صعودی اکید است؟

(۱) $[1, +\infty)$

(۲) $[-9, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -1]$

(۴) $(-\infty, 9]$

۳- نمودار تابع $f(x) = (2 - 2x)^3$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده، سپس آن را یک واحد به چپ و k واحد به بالا

انتقال می‌دهیم. نمودار به دست آمده شکل اولیه را در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{3}$ قطع می‌کند، مقدار k کدام است؟

(۱) ۱۲۵

(۲) ۱۲۴

(۳) ۱۲۶

(۴) ۱۲۹

۴- نقطه $A(\alpha, \alpha)$ روی نمودار $y = 3 - f(3 - x)$ با نقطه $A'(\beta, +1)$ روی نمودار $y = 2 + f\left(\frac{x}{3}\right)$ متناظر است. شیب خط

AA' کدام است؟

(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $-\frac{5}{4}$

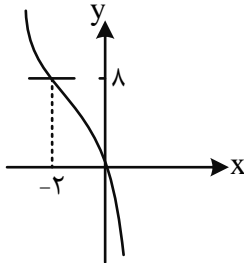
(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{3}{4}$

۵- هرگاه $f(x) = 4x + 2\sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{3x+1}{1-x}$ ، مقدار $(f^{-1} \circ g^{-1})(-7)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) ۴

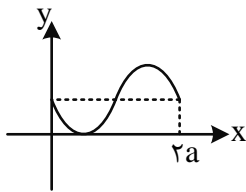
۶- نمودار $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ شکل مقابل است. اگر آن را ۳ واحد به چپ و k واحد در راستای قائم انتقال دهیم،



شکل حاصل نمودار f را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند. k کدام است

- (۱) -۱۰
(۲) ۸
(۳) -۷
(۴) ۹

۷- شکل مقابل قسمتی از نمودار $f(x) = 2 - a \sin bx \cos bx$ است. مقدار ab چه عددی است؟

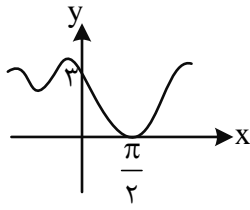


- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$
(۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۸- جواب کلی $1 = -2 \cos\left(\frac{\Delta\pi}{8} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$ کدام است؟

- (۱) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲) $x = \frac{k\pi}{2}$ (۳) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۴) $x = \frac{-k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos 2x + b \sin x + 2$ شکل روبه‌رو است. مقدار $f(\frac{5\pi}{6})$ چه عددی است؟



$$2 \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \quad (1)$$

$$\sqrt{3} + 2 \quad (4) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \quad (3)$$

۱۰- جمع جواب‌های معادله $\cos 2x - 2 \sin^2 x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ برابر θ است. مقدار $\tan \frac{\theta}{6}$ چه عددی است؟

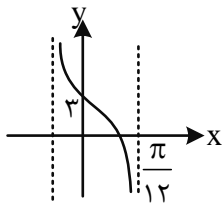
$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$-\sqrt{3} \quad (1)$$

۱۱- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{3} \tan(bx - \frac{\pi}{6})$ شکل مقابل است. مقدار ab کدام است؟



$$8 \quad (1)$$

$$12 \quad (2)$$

$$16 \quad (3)$$

$$24 \quad (4)$$

۱۲- اگر $f(x) = \frac{ax - \sqrt{9x^2 + b}}{ax - 2}$ ، به طوری که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

$$-1/25 \quad (4)$$

$$1/25 \quad (3)$$

$$-5 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$

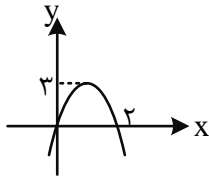
۱۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{2x+a}}{ax^2 - a}$ برابر با $\frac{b}{a}$ است. مقدار b کدام است؟

۴ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)



۱۴- اگر نمودار f شکل مقابل باشد. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+6}{f(x)-3}$ کدام است؟

 $-\infty$ (۲)

 $+\infty$ (۱)

 $\frac{3}{2}$ (۴)

صفر (۳)

۱۵- باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی مانده تقسیم $p(x-1)$ بر

$2x^2 - 5x + 2$ برابر $ax + b$ است. مقدار $b - 3a$ کدام است؟

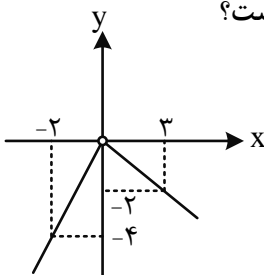
 -2 (۴)

 $\frac{12}{5}$ (۳)

 $\frac{6}{5}$ (۲)

 $\frac{24}{5}$ (۱)

۱۶- نمودار f در مجاورت $x=0$ شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^{[x]} f^{-1}(x)}{f(-3x)}$ چه عددی است؟


 $-\frac{1}{2}$ (۲)

 $\frac{1}{9}$ (۱)

 $\frac{3}{4}$ (۴)

 $+\frac{1}{12}$ (۳)

۱۷- فرض کنید $f(x) = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$ باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - f(2x)}{3x + 1} = 5$ است. مقدار a کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۷ (۳) -۶ (۴) ۵

۱۸- نیم‌مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - ax^2}}$ در نقطه $x = 0$ بر هم عمودند. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2}$

۱۹- تابع $f(x) = \frac{ax + |x - a|}{x^2 + 1}$ در نقطه $x = 2$ مشتق‌ناپذیر است. حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2-h) - f(2)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $0/44$ (۲) $-0/44$ (۳) $0/04$ (۴) $-0/04$

۲۰- هرگاه $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$ و $f(x) = xg(x) + 4x - 3$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۴

پاسخنامه

۱- پاسخ: گزینه ۲

$$y = -1 + f\left(4 + \frac{x}{2}\right)$$

نمودار f را نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{واحد راست } ۸} y = -1 + f\left(4 + \frac{x-8}{2}\right) \xrightarrow{\text{واحد بالا } ۱} y = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

اگر به جای x قرار دهیم $2x$ یعنی انقباض افقی دهیم، آن‌گاه نمودار حاصل بر f منطبق خواهد شد.

۲- پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = -(x-1)^2 + 8$$

ابتدا تابع را به صورت مقابل می‌نویسیم:

برای قرینه نسبت به خط $x = -2$ کافی است x را به $-4 - x$ تبدیل کنیم، یعنی:

$$y = -(-4 - x - 1)^2 + 8 \Rightarrow y = -(x + 5)^2 + 8$$

$$\xrightarrow{\text{واحد انتقال } ۴} y = -(x - 4 + 5)^2 + 8 = -(x + 1)^2 + 8$$

طول رأس سهمی $x = -1$ است، پس تابع در بازه $[-1, +\infty)$ صعودی اکید و در بازه $(-\infty, -1]$ نزولی اکید است.

۳- پاسخ: گزینه ۳

$$\xrightarrow{\text{قرینه به مبدأ}} y = -(2 + 2x)^3 \Rightarrow y = -(2 + 2(x+1))^3 + k$$

$$-(2x + 4)^3 + k = (2 - 2x)^3$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow -125 + k = 1 \Rightarrow k = 126$$

۴- پاسخ: گزینه ۳

$$A(\alpha, \alpha) \in y \Rightarrow \alpha = 3 - f(3 - \alpha) \Rightarrow f(3 - \alpha) = 3 - \alpha$$

$$A'(\beta, 1) \in y = 2 + f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2 = 1 \Rightarrow f\left(\frac{\beta}{2}\right) = -1$$

$$\begin{cases} 3 - \alpha = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = -2 \\ 3 - \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} A \\ 4 \\ 4 \\ -2 \\ +1 \end{matrix} \quad m_{AA'} = \frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۵- پاسخ: گزینه ۱

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-7) = (g \circ f)^{-1}(-7)$$

در ابتدا داریم:

$$(g \circ f)^{-1}(-7) = \alpha \Rightarrow g \circ f(\alpha) = -7 \Rightarrow g(f(x)) = -7$$

$$\frac{3x+1}{1-x} = -7 \Rightarrow 3x+1 = -7+7x \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(\alpha) = 2$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = 2 \Rightarrow 4\alpha + 2\sqrt{\alpha} = 2 \Rightarrow 2\alpha + \sqrt{\alpha} - 1 = 0$$

$$(\sqrt{\alpha} + 1)(2\sqrt{\alpha} - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\text{پس: } (g \circ f)^{-1}(-7) = \frac{1}{4} \Rightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(-7) = \frac{1}{4}$$

۶- پاسخ: گزینه ی ۴

$$f(x) = -(x+2)^r + \lambda \Rightarrow f(-3) = y(-3)$$

$$y = -(x+\delta)^r + \lambda + k$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-3) = 9 \\ y(-3) = +k \end{array} \right\} \Rightarrow k = 9$$

۷- پاسخ: گزینه ی ۳

اولاً دقت کنید $ab > 0$ ، پس فرض می کنیم: $a > 0$ ، $b > 0$

$$f(x) = 2 - \frac{a}{2} \sin 2bx$$

ثانیاً:

$$\min = 2 - \left| \frac{a}{2} \right|, \max = 2 + \left| \frac{a}{2} \right|$$

$$2 - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow T = \lambda \Rightarrow \frac{2\pi}{2b} = \lambda \Rightarrow b = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$f(x) = 2 - 2 \sin \frac{\pi}{\lambda} x$$

$$ab = \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

۸- پاسخ: گزینه ی ۴

$$-2 \cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{\lambda} + x\right) = 1 \Rightarrow -2 \cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) = 1$$

$$2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) - 1 = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - 2x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{\lambda} - 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -2x = k\pi - \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{-k\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda}, k \in \mathbb{Z}$$

۹- پاسخ: گزینه ی ۲

$$f(0) = 3 \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow -a + b + 2 = 0 \Rightarrow -1 + b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) = \cos 2x - \sin x + 2$$

$$f\left(\frac{\Delta\pi}{6}\right) = \underbrace{\cos \frac{\Delta\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\sin \frac{\Delta\pi}{6}}_{\frac{1}{2}} + 2 = 2$$

۱۰- پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow 4\sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \theta = 4\pi$$

$$\tan \frac{4\pi}{6} = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

۱۱- پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$f(0) = 3 \Rightarrow a - \underbrace{\sqrt{3} \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3 \Rightarrow a + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \Rightarrow a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$b \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = + \frac{\pi}{2}$$

از طرفی، $b > 0$ ، پس:

$$b \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{24}{3} = 8 \Rightarrow ab = 16$$

۱۲- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - |3x|}{ax} = \frac{a+3}{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2a+6 = 5a \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{9x^2 + b}}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 9x^2 - b}{2(x-1) \times 2} \Rightarrow -5 - b = 0 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{9x^2 - 5}}{2x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{9x^2 - 5}}{2x - 2} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{2 - \frac{18x}{2\sqrt{9x^2 - 5}}}{2} = -\frac{5}{4} = -1/25$$

۱۳- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{2x+a}}{a(x^2-1)}$$

$$3 - \sqrt{2+a} = 0 \Rightarrow a = 7$$

حد به شرطی تعریف شده است که صورت هم صفر باشد.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - \sqrt{2x+7}}{\cancel{7(x-1)}(x+1)} \times \frac{\cancel{7(x-1)} + \sqrt{2x+7}}{\cancel{7(x-1)} + \sqrt{2x+7}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 - 2x - 7}{14(x-1) \times 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(9x+7)}{\cancel{14(x-1)} \times 6} = \frac{4}{21} = \frac{b}{a} \quad b = 4$$

۱۴- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$f(x) = -3x(x-2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+2)}{-3x(x-2)-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x+2)}{-3(x^2-2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{(x-1)^2} = -\infty$$

۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۴

با توجه به فرض داده شده داریم:

$$p(1) = 8$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$$

$$p(x-1) = (2x^2 - 5x + 2)q(x) + ax + b$$

$$p(x-1) = (x-2)(2x-1)q(x) + ax + b$$

$$x=2: p(1) = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 8$$

$$x = +\frac{1}{2}: p\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}a + b \Rightarrow +\frac{a}{2} + b = 5$$

$$\begin{cases} 2a + b = 8 \\ +\frac{a}{2} + b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4 \Rightarrow b - 2a = 4 - 8 = -4$$

۱۶- پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x & x > 0 \\ \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^{[x]} f^{-1}(x)}{f(-3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1) \times \frac{x}{2}}{2(-3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}x}{-6x} = +\frac{1}{12}$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - (2ax + \sqrt{16x^2 + 1})}{3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2ax - |4x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2ax + 4x}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 - 2a + 4)}{3x} = \frac{+5 - 2a}{3} = 5 \Rightarrow 15 = 5 - 2a \Rightarrow a = -5 \end{aligned}$$

۱۸- پاسخ: گزینه ۳

گوشه نقطه روی نمودار تابع پیوسته f است به طوری که تابع در آن نقطه لااقل یک مشتق یک طرفه حقیقی داشته باشد، اما مشتق ناپذیر باشد.

$$f'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - ax^2}} - \circ}{x} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - ax^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - ax^2}}}$$

$$f'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt{ax^2}}{x \times 2} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt{a}|x|}{2x}$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{a}}{2}\right) = -1 \Rightarrow a = 4 \quad \text{چون نیم‌مماس‌ها در گوشه بر هم عمودند، پس: } f'_-(\circ) = -\frac{\sqrt{a}}{2} \text{ و } f'_+(\circ) = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۱

چون در $x=2$ مشتق ناپذیر است، پس $a=2$ زیرا $x=2$ ریشه داخل قدرمطلق است.

$$f(x) = \frac{2x + |x - 2|}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = -f'_-(2)$$

$$x < 2: f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x + 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'_-(2) = \frac{5 - 4(4)}{25} \Rightarrow -f'_-(2) = 0/44 \Rightarrow \text{حاصل حد} = 0/44$$

۲۰- پاسخ: گزینه ی ۲

در ابتدا داریم $\frac{f(x) + 3}{x} = g(x) + 4$ ، با توجه به آن که $f(0) = -3$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f'(0) - 4$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - 3}{x + 1} + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{x + 1} = 3$$

$$f'(0) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$$