

۱- حداکثر چند جمله ابتدای دنباله هندسی $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل کمتر از 0.497 شود؟

۵ (۲)

۶ (۱)

۳ (۴)

۴ (۳)

$$\underline{a_1 = \frac{1}{3}} / \underline{q = \frac{1}{3}}$$

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3} (1 - (\frac{1}{3})^n)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} (1 - (\frac{1}{3})^n) < \frac{0.497}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - (\frac{1}{3})^n < \frac{0.994}{2} \rightarrow (\frac{1}{3})^n > \frac{0.006}{2} \Rightarrow \frac{1}{3^n} > \frac{0.003}{1} \rightarrow 3^{n+1} < 500 \rightarrow n < 5$$

۲- در یک دنباله حسابی، جمله دهم برابر با ۲۱ و مجموع جملات دهم تا بیستم برابر با ۳۹۶ می باشد. مجموع سی جمله اول این دنباله، کدام است؟

$$1125 \text{ (۲)}$$

$$1215 \text{ (۱)}$$

$$1135 \text{ (۴)}$$

$$1315 \text{ (۳)}$$

$$a_1 + 9d = 21$$

$$a_1 + a_{11} + \dots + a_{20} = 396 \rightarrow S_{20} - S_9 = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) - \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = 20a_1 + 190d - 9a_1 - 36d = 396$$

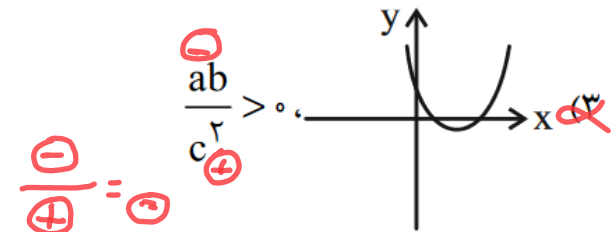
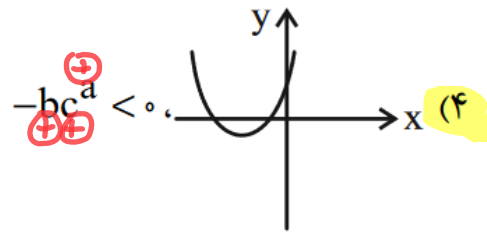
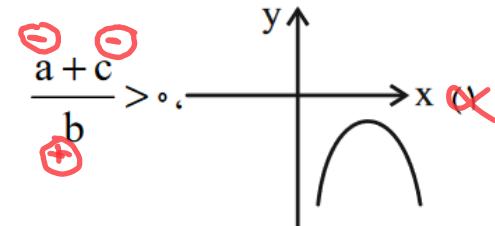
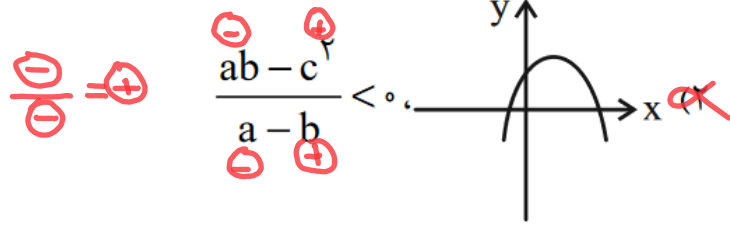
$$11a_1 + 154d = 396$$


$$\begin{cases} a_1 + 9d = 21 \\ 11a_1 + 154d = 396 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 3 \\ a_1 = -2 \end{cases}$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} (-2 - 1 + (29)3) = 1125$$



۳- نمودار سهمی‌های به فرم $ax^2 + bx + c$ رسم شده و اطلاعاتی در مورد a, b, c داده شده است. کدام گزینه، درست می‌باشد؟



۴- اگر 2α و 2β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشد، ریشه‌های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha} - 1, \frac{1}{\beta} - 1\right\}$ است؟ 

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \text{A}$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \text{B}$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{C}$$

$$S = 2\alpha + 2\beta = 2 \rightarrow \underline{\alpha + \beta = 1}$$

$$P = 4\alpha\beta = -4 \rightarrow \underline{\alpha\beta = -1}$$

$$\rightarrow S' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} - 2 = \frac{1}{-1} - 2 = -3$$

۵- در تابع $f(x) = (x^2 + 4x)^2 - 8(x+2)^2 - 16$ ، مجموع صفرهای متمایز تابع، کدام است؟

۴ (۲)

-۶ (۱)


-۸ (۴)

۶ (۳)

$$\underbrace{(x^2 + 4x)}_t^2 - 8 \underbrace{(x^2 + 4x + 4)}_t - 16 \rightarrow t^2 - 8t - 32 - 16 = 0 \rightarrow t^2 - 8t - 48 = 0$$

$t = -4 \quad t = 12$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4x = 12 \rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \rightarrow x = -6 / 2 \\ x^2 + 4x = -4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{array} \right.$$

۶- تعداد جواب‌های معادله $|x-1| + x^2 - 2x - 1 = 0$ ، کدام است؟ 

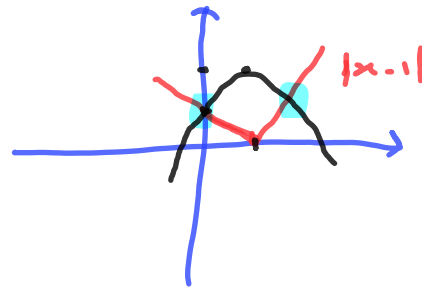
۱ (۲)

۱) صفر

۳ (۴)

۲ (۳)

$$\underline{|x-1| = -x^2 + 2x + 1}$$



۷- ریشه معادله $\frac{4x-4}{x^2-4} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-2}$ ، ریشه معادله $\frac{x-1}{5} + \frac{3}{x} = k$ هم می باشد. مقدار k کدام است؟

۱/۵ (۲)


۱/۲ (۱)

۱/۲۵ (۴)

۱/۳۵ (۳)

$$\frac{x(x-2)(x+2)}{\text{مخرج مشترک}} \Rightarrow 4x^2 - 4x = 2x^2 - 8 + x^2 + 2x \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \begin{cases} x=3 \checkmark \\ x=2 \times \text{(ریشه معرجه)} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{5} + \frac{3}{x} = k \Rightarrow \frac{x-1}{5} + \frac{3}{x} = k \rightarrow 0,4 + 0,75 = k = \underline{\underline{1,35}}$$

۸- جواب معادله $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{20x-9}{x+2} = \frac{3-x}{x^2-x-6}$ کدام است؟ 

$$\frac{17}{6} \quad (2)$$

$$\frac{6}{17} \quad (1)$$

(۴) جواب ندارد.

$$\frac{18}{17} \quad (3)$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{\text{خرج مشترک}} \rightarrow (3x+1)(x+2) - (20x-9)(x-2) = -(x-2)$$

$$= 3x^2 + 7x + 2 - 20x^2 + 49x - 18 = 2 - x \Rightarrow 17x^2 - 57x + 18 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{17} \checkmark \\ x = 3 \times \end{array} \right. \text{(ریشه منجم)}$$

$$17x^2 - 57x + 18 = 0 \rightarrow x^2 - 57x + 306 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 51 \rightarrow \frac{51}{17} = 3 \\ x = 6 \rightarrow \frac{6}{17} \end{array} \right.$$

۹- معادله $\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = 7$ ، چند جواب دارد؟

۲ (۲)

۳ (۱)

۴ (صفر)

۱ (۳)

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = \frac{x+1 - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+1-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 7$$

$$1 + \sqrt{x} = 7\sqrt{x} - 7 \rightarrow 4\sqrt{x} = 8 \rightarrow \underline{\underline{x = \frac{16}{9}}}$$

۱۰- فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند، ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی در مسیر جریان آب از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف، همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر

جریان آب $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی در جهت حرکت آب چند کیلومتر بر ساعت است؟

$$24 \text{ (2)}$$

$$4 \text{ (1)}$$

$$30 \text{ (4)}$$

$$20 \text{ (3)}$$

$$v_2 = v_1 - n$$

$$t_1 + t_2 = 17 \rightarrow \frac{144}{v_1} + \frac{144}{v_1 - n} = 17 \rightarrow \frac{48}{v_1} + \frac{48}{v_1 - n} = 5 \Rightarrow 48(v_1 - n) + 48v_1 = 5v_1(v_1 - n)$$

$$= 48v_1 - (48 \times n) + 48v_1 = 5v_1^2 - 5nv_1 = 5v_1^2 - 134v_1 + 48 \times n = 0$$

$$v_1 = 3.2 \quad \checkmark \quad v_1 = 24 \quad \checkmark$$

$$\underline{x = vt \rightarrow t = \frac{x}{v}}$$

۱۱- در یک دنباله حسابی، جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله مقابل خود به اندازه $\frac{1}{4}$ کم تر است. مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟

$$۳۰ (۴)$$

$$۲۷/۵ (۳)$$

$$d = -\frac{1}{4}$$

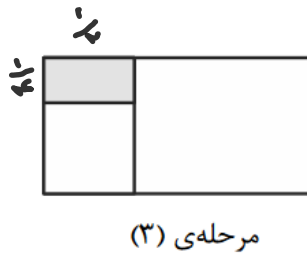
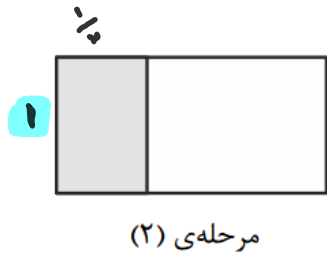
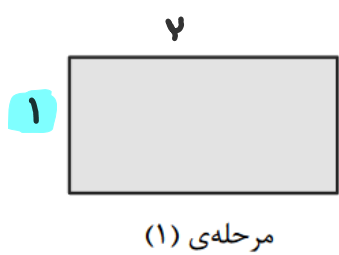
$$۲۵ (۲)$$

$$۲۲/۵ (۱)$$

$$۵۵ = ۳ \rightarrow a_1 + 4d = ۳ \quad \underline{d = -\frac{1}{4}} \quad a_1 - ۲ = ۳ \rightarrow \underline{a_1 = ۵}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (a_1 + a_{10}) = ۵ \times (۲a_1 + 9d) = ۵ \times (۱۰ - \frac{9}{4}) = ۵ \times ۵,۵ = \underline{۲۷,۵}$$

۱۲- مستطیلی در نظر می گیریم که طول و عرض آن به ترتیب ۲ و ۱ سانتی متر باشد. در داخل آن، مجدداً مستطیلی در نظر می گیریم که نسبت طول به عرض آن ۲ باشد و در داخل مستطیل پدید آمده این عمل را مجدداً تکرار می کنیم. مجموع محیط های مستطیل ها تا مرحله ششم، چند برابر محیط مستطیل اول است؟



$$\frac{63}{32} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{31}{8} \quad (1)$$

$$\frac{31}{16} \quad (3)$$

محیط مستطیل اول = ۶
 دوم " " = ۳
 سوم " " = ۱.۵
 ...

۶, ۳, ۱.۵, ... / $a_1 = 2$ / $r = \frac{1}{2}$

$$\frac{S_4}{a_1} = \frac{a_1(1 - (\frac{1}{2})^4)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{8}$$

۱۳- کدام معادله زیر به ازای هر مقدار حقیقی a ، دارای دو ریشه حقیقی و مختلف‌العلامت است؟

$$x^2 + ax - (a^2 + 1) = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + (a^2 + 1)x + a = 0 \quad (X)$$

$$(a^2 + 1)x^2 + x - a = 0 \quad (X)$$

$$x^2 + a(a^2 + 1)x + 1 = 0 \quad (X)$$

$$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow \underline{a < c < 0}$$

۱۴- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{-3}{2} \quad (۲)$$

$$-۲ \quad (۱)$$

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \rightarrow 4a - 7 = 1 \rightarrow \underline{a=2}$$

$$x(2x^2 - x - 5) - 2 = 0 \rightarrow \underline{2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0}$$

$$(x-2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$x=2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x-2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 3x^2 - 5x - 2 \\ \underline{3x^2 - 6x} \\ x - 2 \\ \underline{x - 2} \\ \cdot \end{array}$$

۱۵- کدام خط زیر، سهمی به معادله $f(x) = 3(2x+1)(5-2x)$ را قطع می کند؟

$$y = 10\sqrt{2} \quad (۴)$$

۱۴

$$y = 20\sqrt{2} \quad (۳)$$

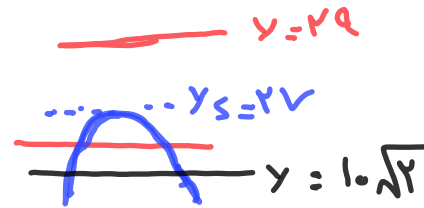
$$y = 44 \quad (۲)$$


$$y = 29 \quad (۱)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} / \frac{5}{2}$$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{2} = 1$$

$$y_s = w(w)(w) = 27$$



۱۶- معادله $\frac{x^2 - x + 1}{3x + 6} = \frac{x^2 - 2x + 4}{2x + 2}$ چند جواب مثبت دارد؟ 

(۴) صفر

(۳) سه

(۲) دو

(۱) یک

$x = -1/-2$

~~$3x^3 - 4x^2 + 11x + 6x^2 - 17x + 24 = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 11x + 2$~~

$\rightarrow x^3 = -22 \rightarrow x = \sqrt[3]{-22}$



۱۷- بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می شود. بهروز به

تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد؟

۳۶ (۴)

۳۵ (۳)

۳۳ (۲)

۳۲ (۱)

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2t+9}{t^2+9t} = \frac{1}{20} \Rightarrow t^2+9t = 2t+18$$
$$\hookrightarrow t^2-7t-18=0 \begin{cases} t=9 \checkmark \\ t=-2 \times \end{cases}$$

۱۸- اگر $x=4$ ، جواب معادله $\sqrt{3x-1} - a = \sqrt{5-x}$ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

۴) جواب دیگری ندارد.

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\frac{11}{4} \quad (1)$$

$$x=2 \rightarrow y = a+1 \rightarrow \underline{a=1}$$

$$\sqrt{3x-1} - 1 = \sqrt{5-x} \rightarrow \sqrt{3x-1} = 1 + \sqrt{5-x} \rightarrow 3x-1 = 1 + 5-x + 2\sqrt{5-x}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5-x} = 4x-1 \rightarrow \sqrt{5-x} = 2x-1 \rightarrow 5-x = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow \underline{4x^2 - 27x + 4 = 0}$$

$$(x-4)(4x-1) = 0$$

$$\sqrt{3x-1} - 1 = \sqrt{5-x} \quad x = \frac{11}{4} \quad -\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$$

۱۹- مجموع ریشه‌های معادله $\sqrt{x-3} + \frac{y}{\sqrt{x-3}+1} = y$ کدام است؟

۱۹ (۴)

۳۹ (۳)

۷ (۲)

۴۲ (۱)

$$t + \frac{y}{t+1} = y \rightarrow t^2 + t + y = yt + y$$

$$\Leftrightarrow t^2 - yt = 0 \begin{cases} t=0 \rightarrow \sqrt{x-3} = 0 \rightarrow \underline{x=3} \\ t=y \rightarrow \sqrt{x-3} = y \rightarrow x-3 = y^2 \rightarrow \underline{x=3+y^2} \end{cases}$$

۲۰- معادله $\sqrt{2x-3} + \sqrt{8x-12} = x+1$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4(2x-3)} = x+1 \Rightarrow 3\sqrt{2x-3} = x+1 \rightarrow 9(2x-3) = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \begin{cases} x=2 \checkmark \\ x=14 \checkmark \end{cases}$$