

۹۶- اگر $f^{-1} = \{(a, 1), (1, 2), (b, -1), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, a), (1, 4), (3, b-1)\}$ به طوری که تابع $f+g$ تابعی ثابت باشد،
 ab کدام است؟

-۳ (۴)

-۶ (۳) ✓

۳ (۲)

۶ (۱)

$$f = \{(1, a), (2, 1), (-1, b), (3, -1)\}$$

$$f^{-1} = \{(1, 2a), (2, 2), (-1, 2b), (3, -2)\}$$

$$D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$$

$$f+g = \{(1, 2a+1), (2, 2+1), (3, -2+b-1)\}$$

$$2a+1 = 2+a$$

$$a = -1$$

$$2+a = b-1$$

$$0 = b-1$$

$$b = 1$$

$$ab = -1$$

۹۷- تابع $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4-x}}$ نمودار وارون خودش را در چند نقطه قطع می کند؟

(۴) بی شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

$$x > 0$$

$$x < 4$$

$$2 - \sqrt{4-x} \geq 0$$

$$\sqrt{4-x} \leq 2$$

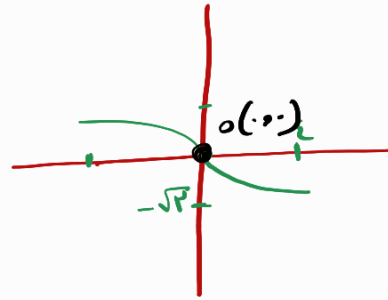
$$x \geq 0$$

$$D_f = [0, 4]$$

$$R_f = [-\sqrt{2}, 0]$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=4 \rightarrow y=-\sqrt{2}$$

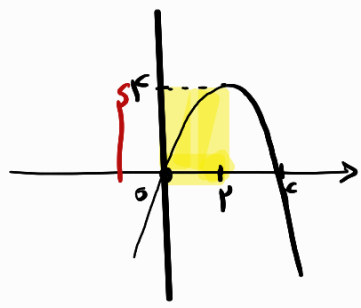


۴ (۴) ✓ ۳ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

۹۸ - $f(x) = 2[x] - 4x + 2$ و $g(x) = 4x - x^2$ برد تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

$0 < x - [x] < 1$
 $-1 < [x] - x < 0$

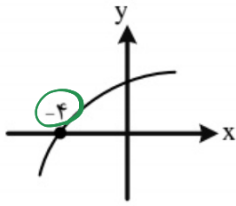
$-1 < [2x] - 2x < 0 \xrightarrow{x^2} -2 < 2[2x] - \varepsilon x < 0 \xrightarrow{+2} 0 < 4(x) < 2$



$g(4(x))$

$R_{g \circ f} = (0, 4] \quad \underline{1, 2, 3, 4}$

۹۹- نمودار f شکل روبه‌رو است. اگر دامنهٔ تعریف $y = \sqrt{(ax+6)f(2-3x)}$ مجموعه \mathbb{R} باشد، مقدار a کدام است؟



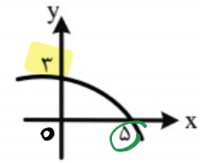
- ۳ (۱)
- ۳ (۲) ✓
- $\frac{۳}{۲}$ (۳)
- $-\frac{۳}{۲}$ (۴)

$f(2-3x)$
 نزول در $x=2$

$2-3x = -6$
 $x = 2$

$ax+c \xrightarrow{x=2} y=0$
 $2a+c = 0$
 $a = -3$

۱۰۰- نمودار تابع f با دامنه \mathbb{R} شکل مقابل است. اگر $g(x) = 5 - \frac{1}{25}x^3$ ، جواب نامعادله $f \circ g \circ f^{-1}(x) < 3$ کدام است؟



$$x < 0 \quad (1)$$

$$x > 0 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$0 < x < 5 \quad (3)$$

$$0 < x < 3 \quad (4)$$

$f^{-1} \rightarrow$ نزول
 $f(m) \rightarrow$ نزول
 $g(m) \rightarrow$ نزول

$$f(g \circ f^{-1}(m)) < \underbrace{3}_{f(5)} \quad f(g \circ f^{-1}(m)) < f(0) \quad \text{نزول}$$

$$g \circ f^{-1}(m) > \underbrace{0}_{g(5)}$$

$$g(f^{-1}(m)) > g(5)$$

$$f^{-1}(m) < \underbrace{5}_{f^{-1}(0)}$$

$$f^{-1}(m) = \underbrace{5}_{f^{-1}(0)} \rightarrow f^{-1}(0) = 5$$

$$f(5) = 0$$

$$f^{-1}(m) < f^{-1}(0)$$

$$\boxed{x > 0}$$

$$5 - \frac{1}{25}x^3 = 0 \quad \frac{1}{25}x^3 = 5$$

$$x^3 = 5^3 \quad x = 5$$

۱۰۱- اگر $f(x) = \frac{x}{2+|x|}$ به طوری که $f \circ f(x) = \frac{x}{a+b|x|}$ مقدار $a+b$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۷ (۱) ✓

$$f(f(x)) = \frac{f(x)}{2+|f(x)|} = \frac{\frac{x}{2+|x|}}{2+\left|\frac{x}{2+|x|}\right|} = \frac{\frac{x}{2+|x|}}{\frac{2(2+|x|)+|x|}{2+|x|}} = \frac{\frac{x}{2+|x|}}{\frac{4+2|x|+|x|}{2+|x|}} = \frac{x}{2+3|x|} = \frac{x}{a+b|x|}$$

$a=4 \quad b=3 \quad (2+3=5)$

۱۰۲- تابع $f(x) = \sqrt{2x+8}$ را ۳ واحد به راست انتقال داده و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. اگر تابع حاصل را g بنامیم، دامنه $g \circ g$ بازه $[\alpha, \beta]$ است. $\beta - \alpha$ کدام است؟

$$\frac{5}{2} \text{ (۴)}$$

$$2 \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{2} \text{ (۱)}$$

$$\sqrt{2n+8} \xrightarrow{\text{تبدیل}} \sqrt{2(n-3)+8} = \sqrt{2n+2} \xrightarrow{\text{قرینه به محور}} y = \sqrt{-2n+2}$$

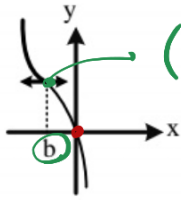
$$g(n) = \sqrt{-2n+2} \quad D_g = (-\infty, 1]$$

$$D_{g \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_g\} = \{x \mid x \leq 1, \sqrt{-2x+2} \leq 1\}$$

$$\sqrt{-2x+2} \leq 1 \quad -2x+2 \leq 1 \quad -2x \leq -1 \quad 2x \geq 1 \quad x \geq \frac{1}{2}$$

$$D_{g \circ g} = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = 1 \quad \left(1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \right)$$

۱۰۳- اگر نمودار تابع $f(x) = (a-2x)^3 - 4a$ شکل مقابل باشد، مقدار ab چه عددی است؟



۴ (۱)

-۴ (۲)

-۲ (۳)

۲ (۴) ✓

$$f(0) = 0 \quad a^3 - 4a = 0 \quad a(a^2 - 4) = 0 \quad a = 0 \quad a = 2 \quad a = -2$$

\downarrow \downarrow
 0 $2, -2$

$$a = 0 \quad y' = -1x^3 \quad \text{صاف}$$

$$a = 2 \quad y' = -1(x-1)^3 - 1 \xrightarrow{\text{عطفا}} \text{(منفرد و مثبت)} \quad \text{صاف}$$

$$a = -2 \quad y' = -1(x+1)^3 + 1 \xrightarrow{\text{عطفا}} \text{(منفرد و منق)} \quad \checkmark$$

\downarrow
 $x = -1$

$$a = -2$$

$$b = -1$$

$$ab = 2$$

۱۰۴ - اگر $f(x) = ax^2 - 2x + b$ و $g = \{(a, -1), (b, 4), (ra, 1)\}$ به طوری که $f \circ g(x)$ تابع همانی باشد، مقدار ab چه عددی است؟

-۳ (۴)

۳ (۳) ✓

-۶ (۲)

۶ (۱)

$$\mathcal{D}_g = \{4, b, ra\}$$

$$f \circ g(a) = 4 \quad f(g(a)) = f(-1) = 4 \quad a + r + b = 4 \quad a + b = 4$$

$$f \circ g(b) = b \quad f(g(b)) = b \quad f(4) = b \quad b = b \checkmark$$

$$f \circ g(ra) = ra \quad f(g(ra)) = ra \quad f(1) = ra \quad a - r + b = ra \quad a - b = -r$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = -r \end{cases} \quad \begin{matrix} ra = r \\ a = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b = 3 \\ ab = 3 \end{matrix}$$

۱۰۵ - اگر $f(2-x) = \sqrt{2x+1}$ و $g(x+3) = \sqrt{4-2x}$ دامنهٔ تعریف تابع $y = g \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

$$f(2-x) = \sqrt{2x+1}$$

$$2-x = t$$

$$x = 2-t$$

$$f(t) = \sqrt{2(2-t)+1}$$

$$f(x) = \sqrt{-2x+5}$$

$$D_f = -2x+5 \geq 0$$

$$D_f \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

$$g(x+3) = \sqrt{4-2x}$$

$$x+3 = t$$

$$x = t-3$$

$$g(t) = \sqrt{4-2(t-3)}$$

$$g(x) = \sqrt{1-2x}$$

$$D_g = 1-2x \geq 0$$

$$D_g \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \left[x \leq \frac{5}{2}, \sqrt{-2x+5} \leq \frac{1}{2} \right] \right\}$$

$$\sqrt{-2x+5} \leq \frac{1}{2}$$

$$-2x+5 \leq \frac{1}{4}$$

$$x \geq -1$$

$$D_{g \circ f} = \left[-1, \frac{5}{4} \right]$$

$$-1, -\frac{3}{4}, \dots, 2$$

۱۳ عدد صحیح

۱۰۶ - اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + x + 1 - k = 0$ برابر $\frac{k}{2}$ است. حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام می‌تواند باشد؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

-۶ (۱)

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 4(1-k)}}{1} = \frac{k}{1}$$

$$\sqrt{1 - 4(1-k)} = k$$

$$1 - 4(1-k) = k^2$$

$$k^2 - 1 + 4k - 4 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$$k=1 \quad k=3$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-k}{1}$$

$\swarrow k=1 \rightarrow P=0$
 $\searrow k=3 \rightarrow P=-2$

۱۰۷- هر دو ریشه معادله $(2a-1)x^2 - 4ax + 2a+1 = 0$ مثبت هستند. حداقل مقدار $[|3a|]$ کدام است؟ آزمون وی ای پی

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) ✓

$$\Delta > 0 \quad 16a^2 - 4(2a-1)(2a+1) > 0 \quad 16a^2 - 16a^2 + 4 = 4 > 0 \quad \checkmark$$

$$p > 0 \quad \frac{c}{a} > 0 \quad \frac{2a+1}{2a-1} > 0 \quad a < -\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad a > \frac{1}{2}$$

$$q > 0 \quad \frac{-b}{a} = \frac{2a}{2a-1} > 0 \quad a < 0 \quad \text{یا} \quad a > \frac{1}{2}$$

استاد $a > \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad a < -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad |a| > \frac{1}{2} \xrightarrow{x^3} |3a| > \frac{3}{2}$

$$[|3a|] = ?$$

$$[|3a|] \geq 1$$

۱۰۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x + m = 0$ و $(2\alpha+1)^2 + (2\beta+1)^2 = 14$ باشد، مقدار m کدام است؟

$$-5 \quad (4)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$\alpha^2 + \alpha = -m \quad \checkmark$$

$$\beta^2 + \beta = -m$$

$$\Sigma \alpha^2 + 1 + \Sigma \alpha + \Sigma \beta^2 + \Sigma \beta + 1 = 14$$

$$4(\alpha^2 + \beta^2) + 4(\alpha + \beta) + 2 = 14$$

$$4(\alpha^2 + \beta^2) + 4(\alpha + \beta) = 12$$

$$4(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta) = 12$$

$$\frac{\alpha^2 + \alpha}{-m} + \frac{\beta^2 + \beta}{-m} = 3$$

$$\begin{aligned} -2m &= 12 \\ m &= \frac{-12}{2} \end{aligned}$$

۱۰۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x + m = 0$ و $(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 = 14$ باشد، مقدار m کدام است؟

$$-\frac{5}{2} \quad (1) \quad -3 \quad (2) \quad -\frac{5}{2} \quad (3) \quad -5 \quad (4)$$

۱۰۹ - خط $y = 3x + 1$ در ناحیه اول بر نمودار سهمی $f(x) = 4x^2 + mx + 2$ مماس است. مقدار $f(m)$ کدام است؟

$$7 \quad (4)$$

$$\Delta = 0 \quad 169 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$247 \quad (1)$$

$$4x^2 + mx + 2 = 3x + 1$$

$$4x^2 + (m-3)x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$(m-3)^2 - 16 = 0$$

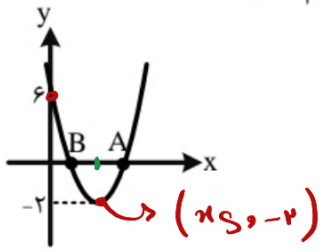
$$(m-3)^2 = 16$$

$$m-3 = 4 \quad m = 7 \longrightarrow \text{منفی} \longrightarrow x \text{ منفی}$$

$$m-3 = -2 \quad m = -1$$

$$f(-1) = 4 + 2 + (-1)(-1) = 7$$

۱۱۰- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. نسبت طول نقطه A به طول نقطه B کدام است؟



- ۴ (۱)
- ۳ (۲)
- ۲ (۳) ✓
- ۵ (۴)

نسبت $\frac{A}{B}$

α

$k\alpha$

$x_0 = \frac{\alpha + k\alpha}{r}$

$f(n) = a(n - \alpha)(n - k\alpha)$

$f(1) = 4$ $k\alpha^r = 4$ $a\alpha^r = \frac{4}{k}$ $k > 1$

$f\left(\frac{\alpha + k\alpha}{r}\right) = -r$ $a\left(\frac{\alpha + k\alpha}{r} - \alpha\right)\left(\frac{\alpha + k\alpha}{r} - k\alpha\right) = -r$

$a\left(\frac{\alpha + k\alpha - r\alpha}{r}\right)\left(\frac{\alpha + k\alpha - rk\alpha}{r}\right) = -r$

$a\left(\frac{k\alpha - \alpha}{r}\right)\left(\frac{\alpha - k\alpha}{r}\right) = -r$

$\frac{a(\alpha^r)}{\frac{a}{k}} \left(\frac{k-1}{r}\right) \left(\frac{1-k}{r}\right) = -r$

\downarrow
 $-\left(\frac{k-1}{r}\right)$

$\frac{a}{k} \left(\frac{k-1}{r}\right)^2 = r$

$\frac{a}{k} \left(\frac{k^2 - 2k + 1}{r}\right) = r \xrightarrow{\times k} \frac{a}{r} (k^2 - 2k + 1) = r k \xrightarrow{\times r} r(k^2 - 2k + 1) = r k$

$r k^2 - 2rk + r = rk$

$r k^2 - 3rk + r = 0$

$\xrightarrow{k > 1} k = 3$

$\left(\frac{k\alpha}{\alpha} = k\right) \quad (k = 3)$

۱۱۲ - اگر α, β ریشه‌های معادله $x^2 + mx^2 + 2x + 1 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله زیر $1 + \frac{\alpha}{\beta}$ و $1 + \frac{\beta}{\alpha}$ است؟

$$x^2 + 6x - 9 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 6x - 6 = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta &= -4 \\ \rho &= -9 \end{aligned}$$

$$x^2 + 9x - 9 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 9x - 6 = 0 \quad (3)$$

$$1 + m + 2 + 1 = 0$$

$$m = -4$$

$$y^l = x^m - \varepsilon x^r + 2n + 1$$

$$(n-1)(x^r - 2n-1) = 0$$

\downarrow $n=1$ \downarrow $n=\alpha$
 \downarrow $n=\beta$

$$\alpha + \beta = \frac{m}{1} = 3$$

$$\alpha\beta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\alpha + \beta = 3 = \delta$$

$$\alpha\beta = -1 = \rho$$

$$\delta = 1 + \frac{\alpha}{\beta} + 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = 2 + \frac{\delta^2 - 2\rho}{\rho} = 2 + \frac{9 - 2(-1)}{-1} = 2 - 11 = -9$$

$$\rho = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 2 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \delta \quad \rho = \delta = -9$$

$$\begin{aligned} \delta &= -9 \\ \rho &= -9 \end{aligned}$$

۱۱۳- اگر a و b صفراهای سهمی $y = 2bx^2 + 5x + a$ و $a < b$ باشد، رأس سهمی در کدام ناحیه قرار دارد؟
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

$$S = a + b = \frac{-5}{2a}$$

$$P = ab = \frac{a}{2b}$$

$$b^2 = \frac{1}{2}$$

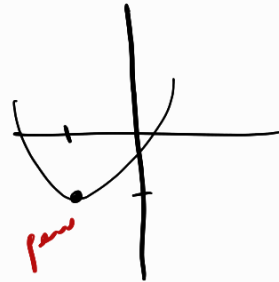
$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = a + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-5}{2a} \quad (a = -\sqrt{2})$$

$$y = 2x^2 + 5x - 3$$

$$S = \left(\frac{-5}{2}, \frac{-29}{4} \right)$$



۱۱۴ - کمترین فاصله مبدأ مختصات از نقاط منحنی $y = \sqrt{10 - 2x}$ چقدر است؟

$$5 (4)$$

$$3 (3)$$

$$\sqrt{3} (2)$$

$$\sqrt{5} (1)$$

$$A(x, y)$$

$$O(0, 0)$$

$$AO^2 = x^2 + y^2$$

$$AO^2 = x^2 + (\sqrt{10 - 2x})^2$$

$$AO^2 = x^2 + 10 - 2x$$

$$AO^2 = (x - 1)^2 + 9$$

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$AO^2 = 9 \quad AO = 3$$

