

دوازدهم ریاضی

۱- مقدار عبارت $A = 10 \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$2/5 + 2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$4/5 + \sqrt{3} \quad (1)$$

$$2/5 + \sqrt{3} \quad (4)$$

$$4/5 + 2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$10 \cos^2 x - 6 \sin^2 x + 2 (\cos^2 x + \sin^2 x) \rightarrow 4(1 + \cos 2x) - 3 \sin^2 x + 2 = 4 + 4 \cos \frac{\pi}{4} - 3 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= 4, 5 + 2\sqrt{3}$$

۲- اگر $\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{m+n}{m-n}$ باشد، مقدار $\tan(x)\tan(y)$ کدام است؟ $(m, n \neq 0, m \neq n)$

$$-\frac{m}{n} \quad (۲)$$

$$\frac{m}{n} \quad (۱)$$

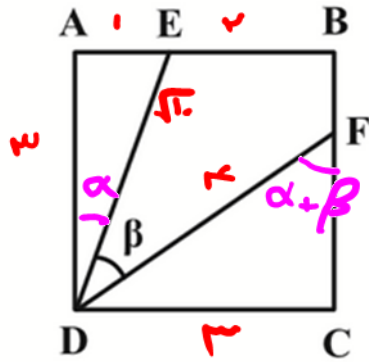
$$-\frac{n}{m} \quad (۴)$$

$$\frac{n}{m} \quad (۳)$$

$$\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \frac{m+n}{m-n} \rightarrow \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \sin y} = \frac{m+n}{-n} \rightarrow \cot x \cot y - 1 = \frac{m+n}{-n}$$

$$\cot x \cot y = \frac{m}{n} \rightarrow \tan x \tan y = \frac{-n}{m}$$

۳- در شکل زیر چهارضلعی ABCD مربع است. اگر $AD = 3$ ، $AE = 1$ و $DF = 4$ باشد، حاصل $\cos\beta + 3\sin\beta$ کدام است؟



$$\frac{2\sqrt{5}}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{4} \quad (2)$$

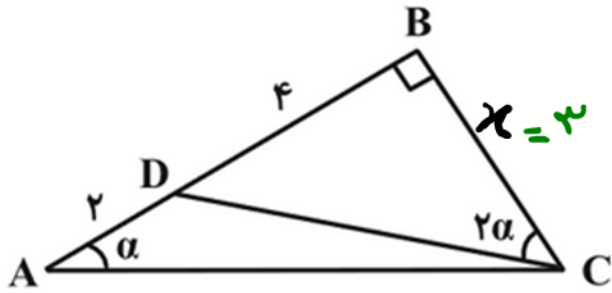
$$\frac{3\sqrt{5}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{2\sqrt{10}}{3} \quad (4)$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} / \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{4} \rightarrow \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = \frac{3}{4} \rightarrow \cos\beta + 3\sin\beta = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

۴- در مثلث شکل زیر، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟ آزمون وی ای پی



$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (۳)$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{4}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{x^2}{16}} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{3}{x} \cdot \frac{x^2}{9} \rightarrow \frac{3x^2}{9} = 3$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \rightarrow AC = 5$$

۵- اگر $2 \tan \beta + \cot \beta = \tan \alpha$ ، آن گاه حاصل $\frac{\cot \beta}{\tan(\alpha - \beta)}$ کدام است؟ $(\alpha - \beta \neq \frac{k\pi}{2})$

۳ (۴)

 $\frac{1}{3}$ (۳)

۲ (۲)

 $\frac{1}{2}$ (۱)

$$\beta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan \alpha = 3$$

$$\frac{\cot \frac{\pi}{4}}{\tan(\alpha - \frac{\pi}{4})} = \frac{\cancel{\cot \frac{\pi}{4}}}{\frac{\tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}}{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\frac{3 \cdot 1}{3 + 1}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

۶- اگر $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})} = 2$ و $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan \beta$ کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)


۷ (۲)

-۷ (۱)

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha = -3 \cos \alpha \rightarrow \underline{\tan \alpha = -3}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\tan \alpha = -3} \frac{\tan \beta - 3}{1 + 3 \tan \beta} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 2 \tan \beta - 6 = 1 + 3 \tan \beta \rightarrow \underline{\tan \beta = -7}$$

۷- اختلاف جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin x = 0$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟ 

$$\frac{\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (3)$$


$$\frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (1)$$

$$\cos 2x = -\sin x \rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$-\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{4}$$

۸- معادله مثلثاتی $(\sin x + \cos x)(2 + \sin x + \cos x) = -1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ 

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) صفر


$$x = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$\sin x + \cos x = t$$

$$t(2+t) = -1 \rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \rightarrow (t+1)^2 = 0 \rightarrow t = -1 \rightarrow \sin x + \cos x = -1$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{4} / \frac{3\pi}{4}$$

۹- معادله $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + \tan x$ در بازه $[0, \pi]$ دارای چند جواب است؟ آزمون وی ای پی 

(۴) فاقد جواب

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1 + \tan x \rightarrow \cancel{1} + \tan x = 1 - \cancel{\tan x} \rightarrow \tan^2 x + \tan x = 0 \begin{cases} \tan x = 0 \rightarrow x = 0, \pi \\ \tan x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

۱۰- به ازای $m \in [a, b]$ ، نمودارهای توابع $y = \cos 4x + m$ و $y = 2 \sin^2 x$ در بازه $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ نقطه مشترک دارند. بیشترین مقدار

$b - a$ کدام است؟

$$\frac{17}{8} \quad (4)$$

$$\frac{17}{4} \quad (3)$$

$$\frac{25}{8} \quad (2)$$

$$\frac{25}{4} \quad (1)$$

$$\cos^2 4x + m = 2 \sin^2 x \rightarrow 2 \cos^2 2x \cdot 1 + m = 1 - \cos 2x \rightarrow \cos^2 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1-m}{2}$$

$$\cos^2 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} = \frac{1-m}{2} + \frac{1}{4} \rightarrow \left(\cos 2x + \frac{1}{4} \right)^2 = \frac{17-8m}{14}$$

$$\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi \rightarrow \frac{4\pi}{3} \leq 2x \leq 2\pi \rightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1 \rightarrow \left(\cos 2x + \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{25}{14}$$

$$\left(\cos 2x + \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{17-8m}{14} \leq \frac{25}{14} \rightarrow -1 \leq m \leq \frac{17}{8} \rightarrow a = -1 / b = \frac{17}{8} / b - a = \frac{17}{8} + 1 = \frac{25}{8}$$

۱۱- فرض کنید $A = [1, 10]$ ، $B = \{x - k \mid x + k \in A\}$ و $C = \{x + k \mid x - k \in A\}$ باشند. اگر حدود k برای این که B و C حداقل

یک عضو مشترک داشته باشند به صورت $[a, b]$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

۷/۵ (۴)

۶ (۳)

۴/۵ (۲)

۳ (۱)

$$B = \{x - 2k \mid x \in A\} = \{1 - 2k, 10 - 2k\}$$

$$C = \{x + 2k \mid x \in A\} = \{1 + 2k, 10 + 2k\}$$

$$B \cap C = \text{تس} \begin{cases} \text{①} & 1 - 2k < 2k + 1 \rightarrow k > \frac{0}{4} \\ \text{②} & 10 + 2k < 1 - 2k \rightarrow k < -\frac{9}{4} \end{cases}$$

→ ناتی

$$\frac{9}{4} < k < \frac{9}{4}$$

$$\hookrightarrow b - a = \frac{9}{4} = 2,25$$

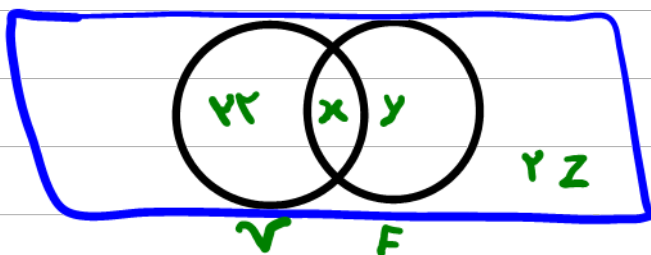
۱۲- در یک مدرسه با ۱۱۲ دانش آموز، ۲۲ دانش آموز فقط والیبال بازی می کنند. اگر تعداد دانش آموزانی که فوتبال بازی می کنند نصف تعداد دانش آموزانی باشد که نه فوتبال و نه والیبال بازی می کنند و همچنین تعداد دانش آموزانی که والیبال بازی نمی کنند چهار برابر تعداد دانش آموزانی باشد که فقط فوتبال بازی می کنند، آنگاه در این مدرسه چند نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند؟

۱۵ (۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)



$$x + y = 2$$

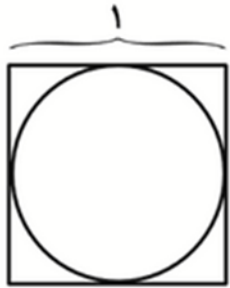
$$112 - 22 - x = 4y \rightarrow \begin{cases} 90 = 4y + x \\ 20 = y + x \end{cases}$$

$$x = ?$$

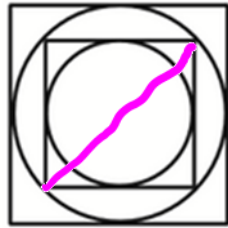
$$n(U) = 112 \rightarrow 22 + \underbrace{x+y}_2 + 2z = 112 \rightarrow 2z = 90 \rightarrow z = 45$$

$$\rightarrow 90 = 4y + x \rightarrow \underline{y = 20} / \underline{x = 10}$$

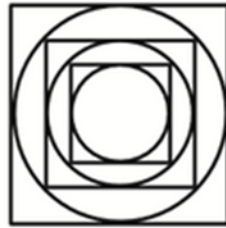
۱۳- با توجه به الگوی زیر، طول شعاع کوچک‌ترین دایره در مرحله نهم برابر کدام است؟



(۱)



(۲)



(۳)

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{22}$

(۲) $\frac{1}{22}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{64}$

(۴) $\frac{1}{64}$

$x \square^x \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2} / \frac{1}{2\sqrt{2}} / \frac{1}{4} / \frac{1}{4\sqrt{2}} / \frac{1}{8} / \dots / \frac{1}{16} / \dots / \frac{1}{32}$

۱۴- فرض کنید S_n ، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد. اگر $S_{14} = S_{16}$ باشد، آن گاه مجموع چند جمله اول این دنباله

برابر صفر است؟

۳۱ (۴)

۳۰ (۳)

۲۹ (۲)

۲۸ (۱)

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_{14} = S_{16} \rightarrow 7(2a + 13d) = 8(2a + 15d) \rightarrow 14a + 91d = 16a + 120d \rightarrow \underline{2a = -29d}$$

$$S_n = 0 \rightarrow \frac{n}{2} (-29d + (n-1)d) = 0 \rightarrow -29d + (n-1)d = 0 \rightarrow n-1 = 29 \rightarrow \underline{n=30}$$

۱۵- اعداد x ، ۲ و y (با همین ترتیب) سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی اند. اگر یک واحد از x کم کرده و یک واحد به y اضافه

کنیم، اعداد جدید (با همان ترتیب) سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی خواهند بود. قدرنسبت دنباله هندسی چقدر از

قدرنسبت دنباله حسابی بیشتر است؟ آزمون وی ای پی

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

$x/۲/y$

$$۴ = x + y \rightarrow \underline{y = ۴ - x}$$

$d = -۱ \rightarrow ۳/۲/۱ \rightarrow$ دنباله حسابی

$x-۱/۲/y+۱$

\rightarrow

$$۴ = (x-1)(y+1) \rightarrow ۴ = xy + x - y - 1 \rightarrow x(4-x) + x - 4 + x - 1 = ۴$$

$r = ۲ \rightarrow ۲/۲/۲ \rightarrow$ دنباله هندسی

$$۴x - x^2 + ۲x - ۹ = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow \underline{x=۳} / \underline{y=۱}$$

۱۶- دنباله حسابی غیر ثابت a, b, c, d, e, \dots و دنباله هندسی a, c, d, \dots مفروض اند. مجموع ۵ جمله اول دنباله حسابی، چند

برابر مجموع سه جمله اول دنباله هندسی است؟

$$\frac{11}{7} \quad (2)$$

$$\frac{10}{7} \quad (4)$$

$$\frac{11}{9} \quad (1)$$

$$\frac{10}{9} \quad (3)$$

$$\underline{c^2 = ad}$$

$$(a+2k)^2 = a(a+3k) \rightarrow ak \neq k^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k=0 \\ k=1/9 \end{cases}$$

$k =$ قدر نسبت
دنباله حسابی

$$\frac{a+b+c+d+e}{a+c+d} = \frac{a + \frac{1}{9}a + \frac{1}{9}a + \frac{1}{9}a + a}{a + \frac{1}{9}a + \frac{1}{9}a} = \frac{\frac{10}{9}a}{\frac{10}{9}a} = \frac{10}{10}$$

۱۷- حدود x ، برای این که $[x-1]$ ، $[x]$ و $\{x\}$ به ترتیب جملات سوم، ششم و نهم یک دنباله هندسی باشند، به صورت بازه $[a, b)$

است، مقدار $a+2b$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۷ (۲)

۶ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

$$\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 9 \\ [x-1] & [x] & [x] \\ 1 & a+1 & a^2 \end{array}$$

$$[x-1] = 1 + \frac{[x-1]}{a} = 1 + a \quad \frac{a+1}{a} = \frac{a^2}{a+1} \rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^3 + a^2 \rightarrow (a-1)^2 = 0 \rightarrow a=1$$

$$[x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3$$

$$[x-1] = 1 \rightarrow 1 \leq x < 2 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \quad a+2b = 2+6 = 8$$

۱۸- حاصل ضرب جملات دوم و دوازدهم یک دنباله حسابی برابر ۱ و حاصل ضرب جملات چهارم و دهم همان دنباله برابر ۵ می باشد.

جمله هفتم این دنباله کدام است؟

$$\pm \frac{\sqrt{29}}{2} \quad (۲)$$

$$\pm \frac{5}{2} \quad (۱)$$

$$\pm \frac{\sqrt{27}}{2} \quad (۴)$$

$$\pm 4 \quad (۳)$$

$$a_2 \cdot a_{12} = 1 \rightarrow (a_1 + d)(a_1 + 11d) = 1 \rightarrow (a_7 - 5d)(a_7 + 5d) = 1 \rightarrow a_7^2 - 25d^2 = 1$$

$$a_4 \cdot a_8 = 5 \rightarrow (a_1 + 3d)(a_1 + 5d) = 5 \rightarrow (a_7 - 3d)(a_7 + 3d) = 5 \rightarrow a_7^2 - 9d^2 = 5$$

$$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow a_1 = a_7 - 6d$$

$$a_7^2 - 25d^2 = 1 \rightarrow a_7^2 = \frac{29}{4} \rightarrow a_7 = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$14d^2 = 4$$

$$\rightarrow d^2 = \frac{1}{7}$$

۱۹- حاصل $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^3 (2 - \sqrt{3})^2$ کدام است؟

$$4 - 2\sqrt{3} \quad (۲)$$

$$2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad (۱)$$

$$1 - 4\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$4(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad (۳)$$

$$(1 + 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{3})(1\sqrt{6} + 1\sqrt{2} + 1\sqrt{2}\sqrt{6} + 1\sqrt{2}\sqrt{2})(2 - \sqrt{3})$$

$$= (1\sqrt{6} + 1\sqrt{2})(2 - \sqrt{3}) = 1\sqrt{6} \cdot 2 - 1\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + 1\sqrt{2} \cdot 2 - 1\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6} - \sqrt{2} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

۲۰- اگر $x + \frac{4}{x+1} = 3 + 4\sqrt{3}$ باشد، آن گاه حاصل $\sqrt{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} = A$ کدام است؟

$$\sqrt{3} + 2 \quad (2)$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$2\sqrt{3} + 2 \quad (4)$$

$$\sqrt{3} + 1 \quad (3)$$

$$x + 1 + \frac{4}{x+1} = 3 + 4\sqrt{3} + 1 \rightarrow x + 1 + \frac{4}{x+1} = 4 + 4\sqrt{3}$$

$$A^2 = x + 1 + \frac{4}{x+1} + 4 = 8 + 4\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{12} = A^2 \rightarrow A = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{4} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{4} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$