

۹۶- در بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-3| + |x+1|$ ، اکیداً نزولی است، نمودار f سهمی به معادله $y = x^2 + x + 2$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۸ (۲)

۷ (۱)

الله انزولی

$y = -2x + 2 \leftarrow y = -x + 3 - x - 1$

$f_1 = f_2 \rightarrow x^2 + x + 2 = -2x + 2$

$x^2 + 3x = 0$

$x = 0, -3 \rightarrow y = 1$

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۹۷- اگر $f(x) = 2 + 2 \log_2(3+x)$ و $g(x) = 2x + \sqrt{4-x}$ و همچنین دامنه تعریف تابع $g \circ f$ بازه $(\alpha, \beta]$ باشد، مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۱)

۴ (۳)

۳ (۲)

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$g(f(x))$

$x > -3$

$2 + 2 \log_2(3+x) \leq 4$

$\log_2(3+x) \leq 1$

$3+x > 0 \rightarrow x > -3$

$4-x \geq 0 \rightarrow 4 \geq x$

$x \leq -1$

$\frac{\alpha}{-3} < x \leq \frac{\beta}{-1}$

$\alpha + \beta = -3 + (-1) = -4$



۹۸- تابع f با دامنه \mathbb{R} اکیداً صعودی و مجموعه جواب نامعادله $f(x^2 + 3) < f(1 - 3x)$ برابر بازه (a, b) است. نمودار تابع

$y = (x-a)^3 + b$ از کدام ناحیه عبور نمی کند؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

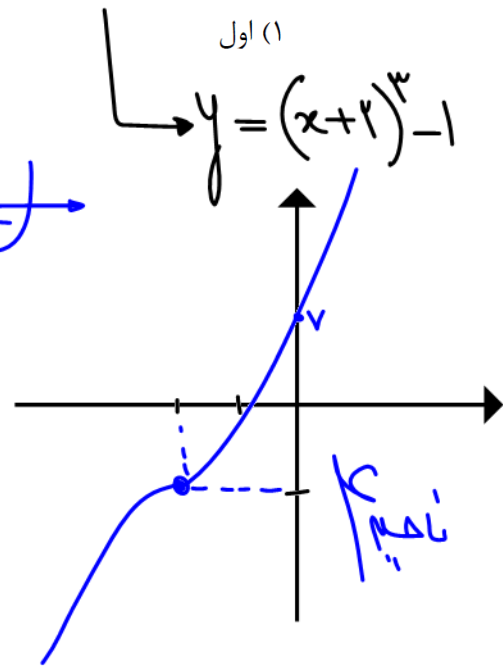
(۲) دوم

(۱) اول

$$x^2 + 3 < 1 - 3x$$

$$|x^2 + 3x + 2| < 0$$

$$-\frac{2}{a} < x < -\frac{1}{b}$$



۹۹- تابع f اکیداً نزولی و $f(a) = -3$ است. به ازای کدام مقدار a ، دامنه تابع $y = \sqrt{(x-1)(3+f(x+2))}$ شامل پنج عدد

صحیح است؟

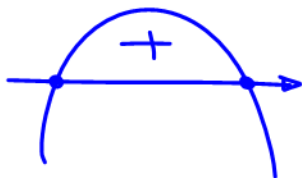
تفکیک

(۴) -۱ یا ۳

(۳) ۵ یا ۷

(۲) -۱ یا ۷

(۱) ۵ یا -۱



$$0 \leq \beta < 9$$

$$-5 < \beta \leq -2$$

$$f\left(\frac{a}{x+2}\right) = -3$$

$$x+2 = a$$

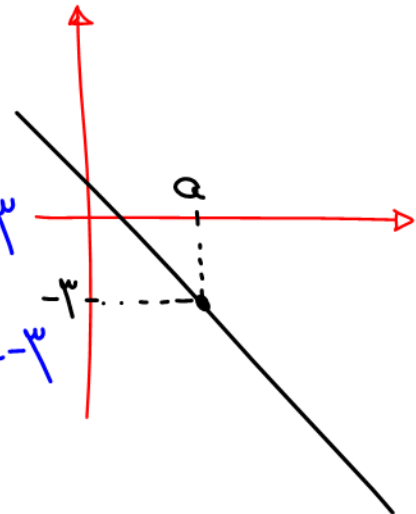
$$x = a-2$$

$$7 \leq a < 11$$

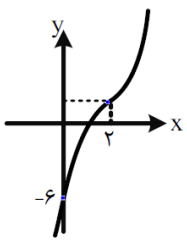
$$-3 < a \leq -2$$

$$-3 \leq x \leq 1 \rightarrow 3 + f(-1) = 0 \rightarrow f(-1) = -3$$

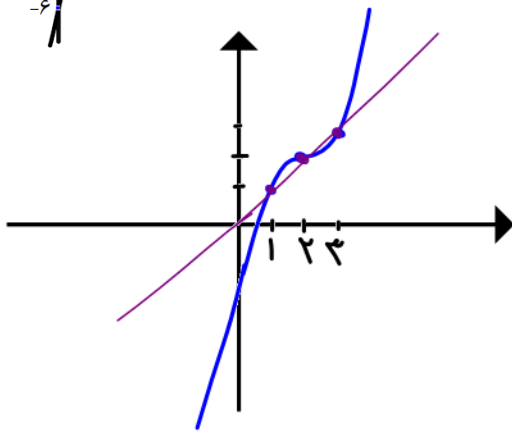
$$1 \leq x \leq 9 \rightarrow 3 + f(7) = 0 \rightarrow f(7) = -3$$



۱۰۰- نمودار تابع $f(x) = (x-a)^3 + b$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{x-f(x)}$ کدام است؟



$$f(x) = (x-2)^3 + 2$$



(۱) $[1, 3]$

(۲) $[1, 2] \cup (3, +\infty)$

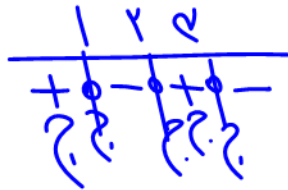
(۳) $(-\infty, 3]$

(۴) $(-\infty, 1] \cup [2, 3]$ ✓

نتیجه $x - f(x) \geq 0 \rightarrow x \geq f(x)$

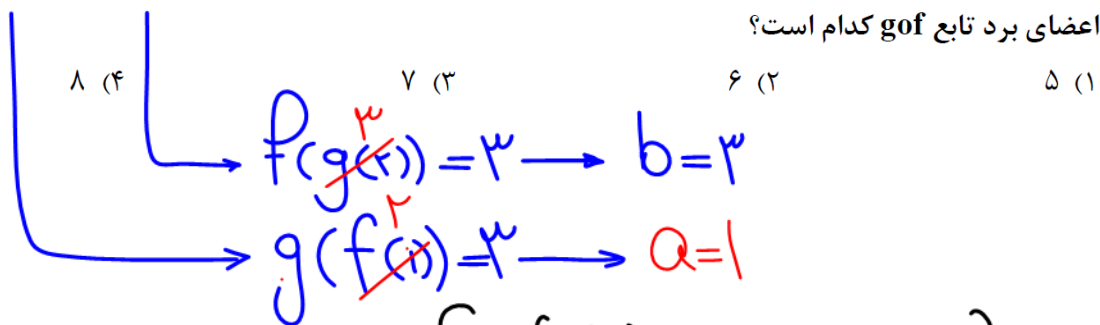
$$(x-2) - (x-2)^3 \geq 0$$

$$(x-2)(1 - (x-2)^2) \geq 0$$



۱۰۱- اگر $f = \{(2, 2), (-1, 3a), (b, 3)\}$ و $g = \{(2, b), (3, 2a), (2, 3)\}$ به طوری که $(2, 3) \in fog$ و $(1, 3) \in gof$ جمع

اعضای برد تابع gof کدام است؟



$$f(g(2)) = 3 \rightarrow b = 3$$

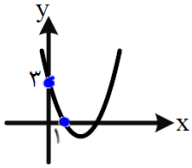
$$g(f(1)) = 3 \rightarrow a = 1$$

$$gof = \{(1, 3), (-1, 2), (3, 2)\}$$

> ۳+۲=۵



۱۰۲- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر تابع $y = ax^2 - f(x+b)$ همانی و a و b دو عدد صحیح باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟



$$ax^2 - f(x+b) = x$$

$$f(x+b) = ax^2 - x$$

$$f(x) = a(x-b)^2 - (x-b) = (x-b)(ax - ab - 1)$$

$$a > 0$$

$$x = b = 1 \quad x = \frac{ab+1}{a} = b + \frac{1}{a}$$

ریشه اولی ریشه دوم

$$f(x) = (x-1)(ax - a - 1)$$

$$-1(-a-1) = 3 \rightarrow a+1 = 3 \rightarrow a = 2$$

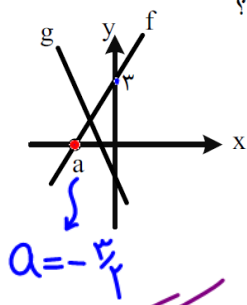
۱۰۳- با فرض $f(x) = \frac{x^2 + ax + m}{x^2 + bx + n}$ و $g(x-1) = \frac{x-3}{x}$ ، توابع $f(x)$ و $g(x)$ برابرند. مقدار $g(m)$ کدام است؟

$$g(x) = \frac{x-2}{x+1} \quad \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$g(-2) = \frac{-2}{-1} = 2$$



۱۰۴- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر $g(x) = \frac{x+2f(x)}{2x-f(x)}$ باشد، مقدار $g(a)$ کدام است؟



$a = -\frac{3}{2}$
روش دیگر

$$g(a) = \frac{a + 2f(a)}{2a - f(a)} = \frac{1}{2}$$

۱ (۲)

۲ (۴)

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2} + 2f\left(-\frac{3}{2}\right)}{-3 - f\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

- $\frac{1}{2}$ (۱)
- $\frac{3}{2}$ (۳)

۱۰۵- مجموع جواب‌های معادله $\left[\frac{x+3}{2}\right] = x + \frac{3}{2}$ چقدر است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۲ (۴)

۳ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

$$[x] = k$$

① $k \leq x < k+1$

② $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x + \frac{1}{2} &\leq \frac{x+3}{2} < x + \frac{3}{2} \\ \rightarrow \quad x + 3 &\leq x + 3 < 2x + 3 \\ \underbrace{x \leq 0} \quad \underbrace{-2 < x} & \\ \underbrace{-2 < x \leq 0} & \end{aligned}$$

② $x + 1, \omega \in \mathbb{Z} \rightarrow x = 0/\omega$ و $-1, \omega$



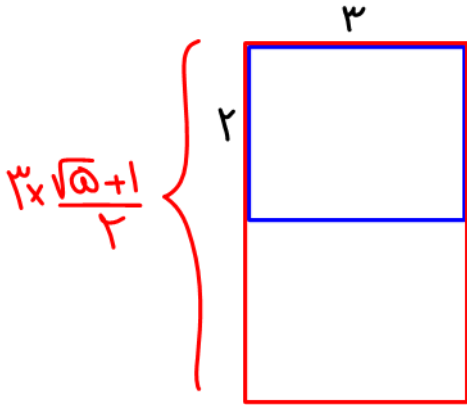
۱۰۶- در یک مستطیل به عرض ۲ و طول ۳ چه عددی به عرض مستطیل اضافه کنیم تا به یک مستطیل طلایی برسیم؟

$$\frac{7 + \sqrt{45}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3\sqrt{5} - 1}{2} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\frac{7 - \sqrt{45}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3\sqrt{5} + 1}{2} \quad (1)$$



$$\frac{3\sqrt{5} + 3}{2} - \frac{2}{1} = \frac{3\sqrt{5} - 1}{2}$$

$a \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)$



۱۰۷- تنها جواب معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x(x-1)}$ برابر α است. مقدار $\sqrt{2-5\alpha}$ چه عددی است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{2}{x(x-1)}$$

$$1 \quad (1)$$

$$\sqrt{2 - 5x - \frac{2}{5}}$$

$$\sqrt{2} = 2$$

$$\frac{2x + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

$$2x^2 - 2x = -x^2 + x + 2$$

$$3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x = 1 \quad \times, \quad \frac{2}{5} \quad \checkmark$$



۱۰۸- دو فرد A و B با هم کاری را در طی ۲۰ روز تمام می کنند. A به تنهایی ۹ روز زودتر از B کار را تمام می کند. آن ها n روز با هم کار کرده و B بعد از n روز کار را رها می کند و A مابقی کار را به تنهایی ۹ روزه تمام می کند. مقدار n کدام است؟

۱۲ (۴) ۱۵ (۳) ۱۸ (۲) ۱۶ (۱)

$$\begin{array}{l}
 AB \rightarrow 20 \text{ روز} \rightarrow \frac{1}{20} \\
 A \rightarrow \cancel{t-9} \rightarrow \text{" " } = \frac{1}{t-9} \\
 B \rightarrow \cancel{t} \rightarrow \text{" " } = \frac{1}{t}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{20} = \frac{1}{t-9} + \frac{1}{t} \\
 \frac{1}{20} = \frac{t+t-9}{t^2-9t} \\
 t^2-9t = 20t-180 \\
 t^2-29t+180=0 \\
 t = \{ \cancel{4}, 45 \} \leftarrow (t-45)(t-4)
 \end{array}
 \right.$$

$$n \times \frac{1}{20} + 9 \times \frac{1}{15} = 1$$

$$\frac{n}{20} = \frac{1}{3} \rightarrow n = 15$$

۱۰۹- n عدد طبیعی و یک رقمی است به طوری که جواب معادله $\sqrt{x+2n} + \sqrt{x} = n$ عدد صحیح است. جمع مقادیر به دست آمده برای n چه عددی است؟

۲۰ (۴) ✓ ۱۸ (۳) ۳۰ (۲) ۳۶ (۱)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+2n} &= n - \sqrt{x} \\
 \cancel{x+2n} &= \cancel{n^2+x} - 2n\sqrt{x} \\
 2n\sqrt{x} &= n^2 - 2n \\
 \sqrt{x} &= \frac{n-2}{2} \\
 \sqrt{x} &= \frac{n-2}{2} \rightarrow x = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \in \mathbb{Z} \rightarrow \{2, 6, 7, 11\}
 \end{aligned}$$



۱۱۰- اگر $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+a} = \frac{1}{6}$ و $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+a} = 4$ ، مقدار a کدام است؟

$-\frac{2}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{4}{3}$ (۲)

$-\frac{5}{3}$ (۱) ✓

$$(\underbrace{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+a}}_4) (\underbrace{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+a}}_{\frac{1}{6}}) = (\underbrace{x-1}_{-1-a}) - (\underbrace{x+a}_{-1-a})$$

$$\frac{4}{3} = -1 - a \rightarrow a = -\frac{7}{3}$$

۱۱۱- عبارت $p(x) = \frac{ax-1}{a-x}$ فقط در بازه $(a, \frac{1}{a})$ مثبت است. حدود a کدام است؟

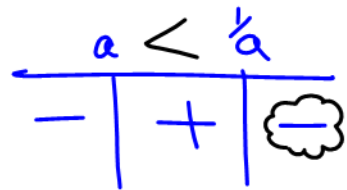
$(-\infty, -1)$ (۴) ✗

$(0, 1)$ (۳) ✓

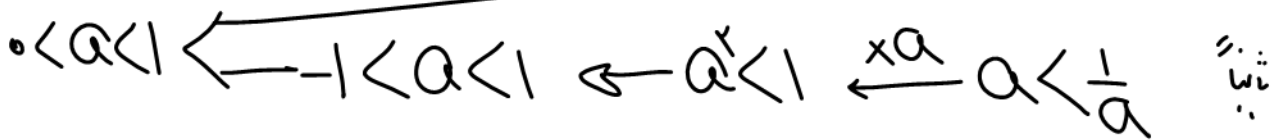
$(-1, 0)$ (۲) ✗

$(1, +\infty)$ (۱)

$$\frac{ax-1}{a-x}$$



$a > 0$ اول



۱۱۲- جدول تعیین علامت $p(x) = (a-2)x^3 + 2x^2 + bx + 2$ به صورت مقابل است. مقدار $a+b$ کدام است؟

x	$\frac{1}{a}$	a
$p(x)$	+	-
		+

۳ (۲)
-۳ (۴)

۵ (۱)
-۵ (۳)

$a=2$
 $p(x) = 2x^2 + bx + 2$

۲، ۱/۲

$S = \frac{a}{p} = \frac{-b}{2} \rightarrow b = -5$

۱۱۳- جمع اعداد صحیح که در نامعادله $5 < \frac{4x-3}{x-2} < 9$ صدق می کند، چه عددی است؟

۲۲ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۲۵ (۱)

$5x - 10 = 4x - 3$
 $x = 7$

$9x - 18 = 4x - 3$
 $5x = 15$
 $x = 3$

$3 < x < 7$
 $x = 4, 5, 6$

روش ۱

روش ۳

$1 < \frac{5}{x-2} < 9$

$1 > \frac{x-2}{5} > \frac{1}{9}$

$5 > x-2 > 1$

$7 > x > 3$

روش ۲

$5 < \frac{4x-3}{x-2} < 9$

$0 < \frac{-x+7}{x-2}$

$\frac{-5x+15}{x-2} < 0$

۲	۷
-	+
	ج

۲	۳
+	-
	ج

$3 < x < 7$



۱۱۴ - مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 \geq \frac{5}{4}$ با فرض $x > 0$ کدام است؟

$(-\infty, \frac{1}{2}]$ ✗

$(0, 1]$ ✓

$[1, +\infty)$ ✗

$[\frac{1}{2}, 1]$ ✗

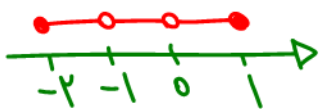
ریشه ۱: $x = \frac{1}{3}: 9 + \frac{9}{16} \geq \frac{5}{4}$ ✓

ریشه ۲: $x = 1: 1 + \frac{1}{4} \geq \frac{5}{4}$ ✓

$-\frac{2}{5} \leq t \leq 2, t \neq 0$ ← شرط نداشتن ۰

$-\frac{2}{5} \leq x^2 + x \leq 2, x \neq 0, -1$

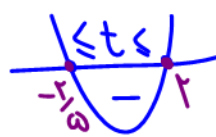
$0 < x^2 + x + \frac{2}{5} < 2$
 $-2 \leq x \leq 1$
 $\Delta < 0$



$\frac{2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x)^2} \geq \frac{5}{4} \rightarrow x^2 + x = t$

$\frac{2t+1}{t^2} \geq \frac{5}{4} \rightarrow 4t+4 \geq 5t^2 \rightarrow$

$0 \geq 5t^2 - 4t - 4 \rightarrow -\frac{2}{5} \leq x^2 + x \leq 2$



$x^2 + x - 2 \leq 0$
 $-2 \leq x \leq 1$
 $0 < x \leq 1$

۱۱۵ - جواب نامعادله $\frac{x^2 - mx + m - 1}{x - \sqrt{x^2 - ax + 2}} > 0$ بازه $(2, +\infty)$ است. مقدار $a + m$ کدام می تواند باشد؟

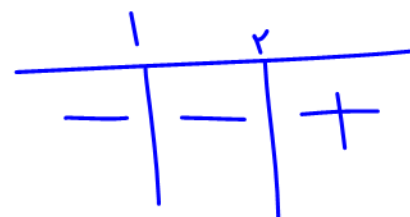
۱۰ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲) ✓

۴ (۱)

$\frac{(x-1)(x-m+1)}{x - \sqrt{x^2 - ax + 2}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 - ax + 2}}{x + \sqrt{x^2 - ax + 2}}$
 $\frac{(x-1)(x-m+1)(x + \sqrt{x^2 - ax + 2})}{x^2 - ax + 2}$
 $ax - 2$



حالت ۱: $x = 1$: $a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$
 $2 - m + 1 = 0 \rightarrow m = 3$
 $\frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)} (x + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$
 ریشه ندارد

حالت ۲: $x = 1$: $1 - m + 1 = 0 \rightarrow m = 2$
 $2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$
 $\frac{(x-1)^2}{x-2} (x + \sqrt{x^2 - x + 2})$
 ریشه ندارد

