

۱ اگر $f^{-1} = \{(a, 1), (1, 2), (b, -1), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, a), (1, 4), (3, b-1)\}$ تابع $2f+g$ تابعی ثابت باشد. ab کدام است؟

-3 (۴)

-6 (۳)

3 (۲)

6 (۱)

$$f = \{(1, a), (2, 1), (-1, b), (3, -1)\}$$

$$ab = 3 \times (-2) = -6$$

$$2f = \{(1, 2a), (2, 2), (-1, 2b), (3, -2)\}$$

$$2f + g = \{(2, 2+a), (1, 4+2a), (3, b-3)\}$$

$$\underbrace{2+a = 4+2a = b-3}_{\downarrow} \xrightarrow{a=-2} 2+a = 4+2a = b-3 = 0 \rightarrow \underline{b=3}$$

$$\underline{a=-2}$$

۲ هرگاه $f(x) = (2a+c)x + b + 4$ تابع ثابت و $g(x) = (b+3)x + 3a - c - 10$ تابع همانی باشد. مقدار abc کدام است؟

-۱۶ (۴)

-۸ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

$$2a + c = 0 \rightarrow c = -2a \quad \textcircled{I}$$

$$g(x) = x = (b+3)x + 3a - c - 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{a = 2} \quad \textcircled{I} \rightarrow \underline{c = -4}$$

$$b + 3 = 1 \rightarrow \underline{b = -2}$$

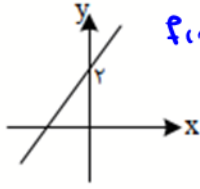
$$3a = c + 10 \quad \textcircled{I} \rightarrow 3a = 10 - 2a$$

$$abc = (-2)(2)(-4) = 16$$

ضریب x همسان

$= x$

نمودار تابع خطی $y=f(x)$ شکل روبه‌رو است. اگر $y=3x-2f(x+2)+a$ تابع همانی باشد. کدام تابع ثابت است؟ ۳



$$f(x) = mx + 2 \rightarrow f(x+2) = m(x+2) + 2$$

$$y = (2a+1)x + 2(1)$$

$$y = (2a-2)x + 1(2)$$

$$\rightarrow -2f(x+2) = -2m(x+2) - 4$$

(I)

$$y = (-2m+a)x + 2(2)$$

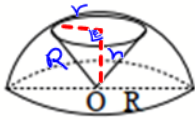
$$y = (a+1)x + 2(2)$$

$$3x - 2f(x+2) + a = x \xrightarrow{(I)} 3x - 2mx - 4m - 4 + a = x$$

$$3 - 2m = 1 \rightarrow m = 1$$

$$-4m - 4 + a = 0 \xrightarrow{m=1} -8 + a = 0 \rightarrow a = 8$$

۴ مطابق شکل. مخروطی را درون نیم کره‌ای به شعاع R محاط کرده‌ایم. حجم مخروط به صورت تابع بر حسب ارتفاع مخروط کدام است؟



$$V(h) = \frac{\pi}{3} (h^2 - Rh^2) \quad (۲)$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} (Rh^2 - h^3) \quad (۱)$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} (h - Rh^2) \quad (۴)$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} (R^2 h - h^3) \quad (۳)$$

$$R^2 = r^2 + h^2 \quad (۱)$$

$$V = \frac{1}{3} s \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \xrightarrow{(۱)} V = \frac{\pi}{3} h (R^2 - h^2) = \frac{\pi}{3} (R^2 h - h^3)$$

۵ اگر دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{(m-1)x^2 - 2mx + m+2}$ برابر \mathbb{R} باشد، حدود m کدام است؟

$$-2 \leq m < 1 \text{ (۴)}$$

$$m \geq 2 \text{ (۳)}$$

$$1 < m \leq 2 \text{ (۲)}$$

$$m < 1 \text{ (۱)}$$

$$(m-1)x^2 - 2mx + m+2 \geq 0 \quad \text{I: } m-1 > 0 \rightarrow m > 1$$

$$\text{II: } \Delta \leq 0$$

$$\text{II: } \Delta = 4m^2 - 4(m-1)(m+2) \leq 0 \rightarrow m^2 - (m-1)(m+2) \leq 0 \rightarrow$$

$$m^2 - m^2 - m + 2 \leq 0 \rightarrow 2 \leq m$$

$$\text{I, II} \rightarrow 2 \leq m$$

۶ تابع f با دامنه \mathbb{R} به شکل مقابل است. دامنه تعریف $y = \sqrt{\frac{f(-x)}{ax-4}}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ است. مقدار α چه عددی

است؟

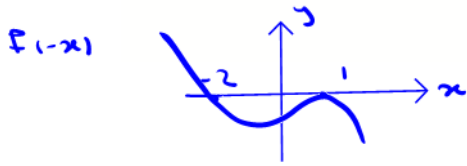
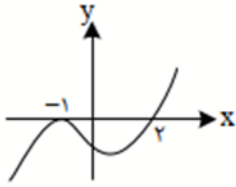
۲ (۱)

-۲ (۲)

۴ (۳)

-۴ (۴)

$$a(\alpha) - 4 = 0 \rightarrow a\alpha = 4$$



اگر $f(x) = 2a + 2 - \sqrt{4 - 2ax}$ به طوری که دامنه و برد تابع f برابر هم باشند، مقدار a کدام است؟ ۷

$$\frac{1+2\sqrt{7}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1+\sqrt{7}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{7}-1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1-\sqrt{7}}{3} \quad (1)$$

$$D_f: 4 - 2ax > 0 \rightarrow 2 > ax \quad \begin{cases} a > 0 & \frac{2}{a} > x \\ a < 0 & \frac{2}{a} < x \end{cases}$$

$$R_f: (-\infty, 3a+2]$$

$$D_f = R_f \xrightarrow{a > 0} D_f = R_f = (-\infty, 3a+2]$$

$$3a+2 = \frac{2}{a} \rightarrow 3a^2 + 2a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{\sqrt{28} - 2}{6}$$

$$= \frac{2(\sqrt{7}-1)}{6} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

اگر $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2x^2+bx-c}{x^2-2ax+4a-4}$ دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند، مقدار $2b-ac$ کدام است؟

$$x+1=t \rightarrow x=t-1 \rightarrow f(t) = \frac{3(t-1)+4}{t-2} \rightarrow f(t) = \frac{3t+1}{t-2}$$

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \quad , \quad g(x) = \frac{(3x+1)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{3x^2-5x-2}{x^2-4x+4}$$

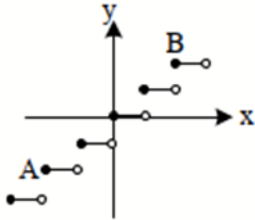
$$-2a = -4 \rightarrow a = 2$$

$$4a - 4 = 4 \rightarrow a = 2$$

$$b = -5 \quad , \quad c = 2$$

$$2b - ac = 2(-5) - (2)(2) = -14$$

بخشی از نمودار تابع $y = 3a \left[\frac{x}{a} \right]$ شکل مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟ ۹



$$\text{شیب پاره خط} = \frac{1}{1/a} = a$$

$$B = (2a, 3a \left[\frac{2a}{a} \right]) = (2a, 6a)$$

$$A = (-2a, 3a \left[\frac{-2a}{a} \right]) = (-2a, -6a)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6a - (-6a)}{2a - (-2a)} = \frac{12a}{4a} = 3$$

$$3a \quad (1)$$

$$\frac{3}{2}a \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

تعداد جواب‌های معادله $\left[\frac{x^2 - x}{3} \right] = \frac{x^2 + x}{3}$ کدام است؟ ۱۰

f(f)

f(f)

f(f)

f(f)

$$\left[\frac{x^2 - x}{3} \right] = \frac{x^2 + x}{3} = k \rightarrow x^2 + x = 3k \rightarrow x^2 + x - 3k = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12k}}{2} \quad \textcircled{I}$$

$$\hookrightarrow x^2 = 3k - x$$

$$\bullet \rightarrow \left[\frac{3k - x - x}{3} \right] = k \rightarrow \left[k - \frac{2x}{3} \right] = k \rightarrow k + \left[-\frac{2x}{3} \right] = k \rightarrow$$

$$\left[-\frac{2x}{3} \right] = 0 \rightarrow 0 \leq -\frac{2x}{3} < 1 \rightarrow 0 \leq -2x < 3 \rightarrow -\frac{3}{2} < x \leq 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 12k}}{2} \rightarrow k=0, x=0 \quad / \quad k=1, x=1, -$$

① →

$$x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 12k}}{2} \rightarrow k=0, x=-1 \quad / \quad k=1, x=-2, -$$

با کدام تبدیلات روی نمودار $y = 2f(\frac{x}{3})$ می توان به نمودار $y = 3f(\frac{x}{4})$ رسید؟

(1) انبساط عمودی و انقباض افقی

(2) انبساط عمودی و انبساط افقی

(3) انقباض عمودی و انقباض افقی

(4) انقباض عمودی و انبساط افقی

انبساط عمودی - انقباض افقی

$f(x) \rightarrow f(ax)$ انقباض $\rightarrow |a| > 1$
انبساط $\rightarrow |a| < 1$

۱۲ نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال داده و سپس نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم.

نمودار حاصل خط $y = x + 5$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$-۲, -۴ \text{ (۴)}$$

$$-۲, ۴ \text{ (۳)}$$

$$۲, ۴ \text{ (۲)}$$

$$۲, -۴ \text{ (۱)}$$

$$\xrightarrow{x-3} y = \frac{1}{x-3} \xrightarrow{-2} y = \frac{1}{x-3} - 2 \xrightarrow[\text{ضرب: } -1]{x \rightarrow -x} -\left(\frac{1}{-x-3} - 2\right) = \frac{1}{x+3} + 2$$

$$\frac{1}{x+3} + 2 = x+5 \rightarrow \frac{1}{x+3} = x+3 \rightarrow (x+3)^2 = 1 \rightarrow \begin{array}{l} x+3=1 \rightarrow x=-2 \\ x+3=-1 \rightarrow x=-4 \end{array}$$

۱۳ تابع $y=f(x)$ با دامنه $[-2, 3]$ و برد $[-3, 2]$ مفروض است. اگر دامنه و برد تابع $y=3-\frac{1}{4}f(1-2x)$ به ترتیب دارای

m و n عدد صحیح باشند، حاصل $m-n$ کدام است؟

-1 (۴)

1 (۳)

2 (۲)

-2 (۱)

$$-2 \leq 1-2x < 3 \rightarrow -3 \leq -2x < 2 \rightarrow -1 < x \leq \frac{3}{2} \text{ و } D_g = (-1, \frac{3}{2}] \rightarrow x=0, x=1$$

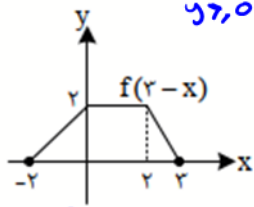
$m=2$

$$R_f \xrightarrow{x-\frac{1}{2}} [-1, \frac{3}{2}) \xrightarrow{+3} [2, \frac{9}{2}) \rightarrow x=2, 3, 4$$

$n=3$

$$m-n = 2-3 = -1$$

۱۴ نمودار تابع $y=f(3-x)$ به صورت مقابل است. اگر نمودار تابع $y=f(k+2x)$ از ناحیه اول عبور نکند. حدود k کدام است؟



$$y > 0, x \leq 0$$

$$k \geq \frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$k \geq 5 \quad (۱)$$

$$k \leq -5 \quad (۴)$$

$$k \leq -\frac{5}{2} \quad (۳)$$

$$-2 \leq x \leq 3 \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} -3 \leq -x \leq 2 \xrightarrow{+3} 0 \leq 3-x \leq 5$$

$$0 \leq k+2x \leq 5 \xrightarrow{-k} -k \leq 2x \leq 5-k \xrightarrow{\div 2} -\frac{k}{2} \leq x \leq \frac{5-k}{2}$$

$$\frac{5-k}{2} \leq 0 \rightarrow 5-k \leq 0 \rightarrow 5 \leq k$$

$$-x+3$$

۱۵ تابع $f(x) = x^2 - 3x - 5$ مفروض است. نمودار تابع $y = 2f(3-x)$ را ۲ واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را چند واحد به راست انتقال دهیم تا مجموع صفرهای تابع حاصل برابر ۵ باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$x_1, x_2, x_1 + x_2 = 3$$

$$\begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1 - 3 \rightarrow 3 - x_1 \rightarrow 1 - x_1 \xrightarrow{k \neq 0} 1 + k - x_1 \\ x_2 \rightarrow x_2 - 3 \rightarrow 3 - x_2 \rightarrow 1 - x_2 \xrightarrow{k \neq 0} 1 + k - x_2 \end{array} \quad + \quad 2 + 2k - \underbrace{(x_1 + x_2)}_3 = 5$$

$$\rightarrow 2 + 2k - 3 = 5 \rightarrow 2k = 6 \rightarrow k = 3$$

۱۶ نقطه $A(2, 3)$ روی نمودار $y = a - 2f\left(\frac{bx}{y}\right)$ با نقطه $A'(-7, 2)$ روی نمودار $y = 3b + f(a-x)$ متناظر است. کدام

نقطه زیر روی نمودار $y = f(x)$ با این دو نقطه متناظر است؟

$$A''(2, -4) \text{ (۴)}$$

$$A''(2, -5) \text{ (۳)}$$

$$A''(-5, -4) \text{ (۲)}$$

$$A''(-5, 2) \text{ (۱)}$$

$$A = (2, 3) \rightarrow 3 = a - 2f(b) \rightarrow f(b) = \frac{a-3}{2} \Leftrightarrow (2, -4)$$

$$A' = (-7, 2) \rightarrow 2 = 3b + f(a+7) \rightarrow f(a+7) = 2-3b$$

$$b = a+7 \text{ (۱)}$$

$$\frac{a-3}{2} = 2-3b \rightarrow a-3 = 4-6b \xrightarrow{\text{(۱)}} b-7-3 = 4-6b \rightarrow 7b = 14 \rightarrow b = 2$$

$$\xrightarrow{\text{(۱)}} a = -5$$

۱۷ نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$ را k واحد به راست انتقال داده و سپس طول نقاط روی تابع را n برابر می‌کنیم. تابع

حاصل را $g(x)$ می‌نامیم. اگر تابع $g(x)$ بر منحنی $y = \frac{x-6}{2x-6}$ منطبق باشد، مقدار $f(-n)$ کدام است؟ $(n, k \in \mathbb{N})$

-۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

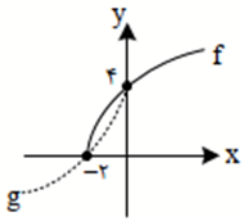
$\xrightarrow{\text{کدام راست}} y = \frac{x-k-1}{2(x-k)+1}$ $\xrightarrow{\text{طول } n \text{ برابر}} y = \frac{\frac{x}{n}-k-1}{\frac{2x}{n}-2k+1} = g(x) \rightarrow g(x) = \frac{x-kn-n}{2x-2nk+n}$

$$\begin{cases} -kn - n = -6 \\ -2nk + n = -6 \end{cases} \xrightarrow{①} -3kn = -12 \rightarrow kn = 4 \rightarrow -4 - n = -6 \rightarrow n = 2 \rightarrow$$

$k = 2$

$f(-n) = f(-2) = \frac{-3}{-3} = 1$

۱۸ در شکل مقابل، نمودار تابع f ، فقط از انتقال و قرینه‌یابی تابع g به دست آمده است. اگر $f(x) + g(a-x) = b$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۲

(۳) -۲

(۴) -۶

$$I: x=0 \rightarrow \overset{4}{f(0)} + g(a) = b \rightarrow g(a) = b - 4 \quad \xrightarrow{\text{میان نمودار}}$$

$$I: x=-2 \rightarrow \overset{0}{f(-2)} + g(a+2) = b \rightarrow g(a+2) = b$$

$$a = -2$$

$$b = 4$$

$$a + b = 2$$

تابع $y = 2x + m$ را دو واحد به راست انتقال داده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا تابع f به دست آید.
 حال تابع f را سه واحد به بالا انتقال داده و سپس نسبت به خط $x = 2$ قرینه می‌کنیم تا تابع g به دست آید. عرض از
 مبدأ خط $f - g$ کدام است؟

قرینه نسبت به $x = 9$ ← $x = 2a - x$

۳ (۴)

-۵ (۳)

-۳ (۲)

۵ (۱)

۲ در ۱ مرتبه راست $y = 2(x - 2) + m = 2x + m - 4$ $\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x}$ $f(x) = -2x + 4 - m$ $\xrightarrow{\text{۳ در ۱ مرتبه بالا}}$

$y = -2x + 7 - m$ $\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x = 2}$ $-2(4 - x) + 7 - m = g(x)$

$(f - g)(x) = -2x + 4 - m - (-8 + 2x + 7 - m) = -2x + 4 - m + 8 - 2x - 7 + m$

$= -4x + 5$

$$S_f = (2, m-4)$$

۲۰ نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + m$ را نسبت به خط $x=3$ قرینه کرده. دو واحد به سمت بالا انتقال داده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا تابع g به دست می‌آید. اگر رأس سهمی $y = g(x+k) + k$ بر رأس سهمی f منطبق باشد. حاصل $m+k$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x=3} y = (6-x)^2 - 4(6-x) + m \quad \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y = (6-x)^2 - 4(6-x) + m + 2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = -(6-x)^2 + 4(6-x) - m - 2 = g(x)$$

$$g(x) = -x^2 + 12x - 36 + 24 - 4x - m - 2 = -x^2 + 8x - 14 - m$$

$$S_g = \left(\frac{-b}{2a}, g\left(\frac{-b}{2a}\right) \right) = (4, 2-m) \rightarrow S' = (4-k, 2+k-m)$$

$$2 = 4 - k \xrightarrow{k=2} m - 4 = 4 - m \rightarrow 2m = 8 \rightarrow m = 4$$