

۱- نمودار تابع $y = 2 - f\left(3 - \frac{x}{4}\right)$ را نسبت به مبدا مختصات قرینه کرده، دو واحد به بالا و k واحد به راست انتقال داده ایم و سپس طول نقاط را نصف می‌کنیم. اگر نمودار نهایی بر نمودار $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$ منطبق باشد، k کدام است؟

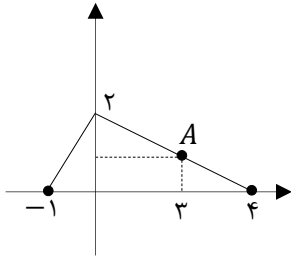
۱۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

۲- نمودار تابع $y = 2 - 3f\left(\frac{x}{4}\right)$ به صورت مقابل است. نقطه A واقع بر این نمودار، با نقطه A' واقع بر نمودار $y = f(x)$ متناظر است. مجموع مختصات A' کدام است؟

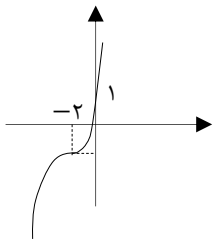


۲ (۲)

 $\frac{7}{4}$ (۱) $\frac{5}{4}$ (۴)

۳ (۳)

۳- نمودار تابع $f(x) = (x - a)^3 + b$ به صورت مقابل است. باقی مانده تقسیم $f \circ f(x)$ بر $x + b - 4a$ کدام است؟



-۶۴ (۲)

-۷۱ (۱)

-۵۷ (۴)

-۶ (۳)

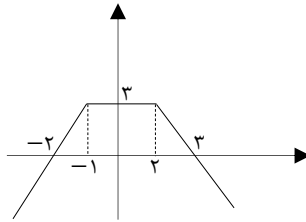
۴- چند جمله ای $f(x) = x^6 - 8x^3 + x^2 + ax + 4$ مفروض است. اگر باقی مانده تقسیم $f(x+1)$ بر $x-1$ با باقی مانده تقسیم $f(x-1)$ بر $x-2$ برابر باشد مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) -۸ (۴) -۱۰

۵- تابع $f(x) = x|x-2| + ax$ در مجموعه اعداد حقیقی اکیدا صعودی است. حدود a کدام است؟

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a \geq 1$ (۳) $a \geq 2$ (۴) $a \leq 1$

۶- نمودار تابع $y = f(x-1)$ به صورت مقابل است. اگر تابع $y = 2f(\frac{x-3}{4})$ در بازه $[a, +\infty)$ اکیدا یکنوا باشد حداقل a کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) ۳
(۳) ۶ (۴) ۷

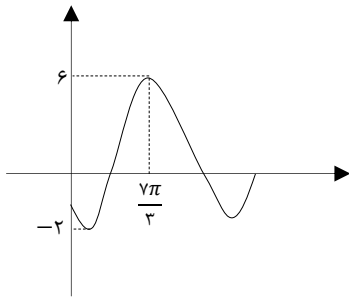
۷- تابع $f(x) = 6 - 2x$ با دامنه $[1, 4]$ مفروض است. مجموعه جواب نامعادله $f \circ f(x) < f(x)$ چند جواب صحیح دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی شمار

۸- دوره تناوب تابع $f(x) = 2 - a - \cos \frac{\pi}{a} x$ برابر $\frac{2}{3}$ است. اختلاف ماکزیمم و مینیمم a ، چقدر است؟

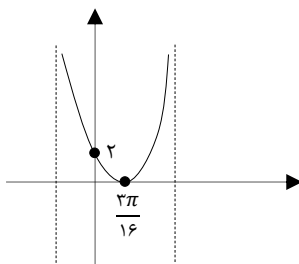
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) ۳

۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = c + a \sin\left(bx + \frac{\pi}{4}\right)$ به صورت مقابل است. حاصل $a + bc$ کدام است؟



- (۱) ۵
(۲) ۳
(۳) -۳
(۴) -۵

۱۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \tan^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right)$ به صورت مقابل است. حاصل $a - b$ کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۴/۳
(۳) ۲/۳
(۴) صفر

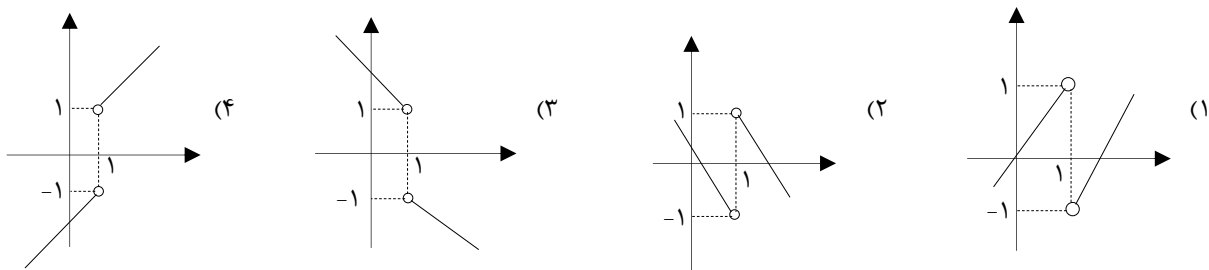
۱۱- مجموع جواب های معادله $\sin x + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4\pi}{3}$
(۲) $\frac{7\pi}{6}$
(۳) $\frac{5\pi}{3}$
(۴) $\frac{3\pi}{2}$

۱۲- اگر α کوچک ترین جواب مثبت معادله $7 - \frac{6}{\sin x} = 5 \sin x$ باشد، حاصل $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) -7 (۴) 7

۱۳- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \cos(\pi[x])}{\sin(\pi x)} = -\infty$ باشد، $f(x)$ کدام می تواند باشد؟



۱۴- اگر $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x+1}{ax^2 + \epsilon ax + 18} = -\infty$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

- (۱) 5 (۲) -5 (۳) 1 (۴) -1

۱۵- تابع $f(x) = 2 \sin \frac{x}{3}$ را با دامنه $[0, 6\pi]$ در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{a + f(x+b)} = -\infty$ باشد، حاصل $\frac{1}{\pi} ab$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) $-\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

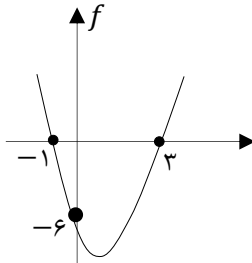
۱۶- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^m + 2x^n + 2} = k$ و m و n دو عدد طبیعی باشند، مجموع جواب های ممکن برای k کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{11}{6}$ (۳) $\frac{13}{6}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{a + bx + x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - 3 \right) = 2$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

۱۸- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر g تابعی خطی و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + xg(x)}{1 + g^{-1}(x)} = 6$ باشد، مقدار $g(2)$ کدام است؟



- (۱) صفر (۲) -۱

- (۳) -۲ (۴) -۳

۱۹- از برخورد مجانب های تابع $f(x) = \frac{2x - |x|}{|2x + 1| - 3}$ یک مستطیل بوجود می آید. مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۰- اگر $A(2, 3)$ نقطه برخورد و مجانب های تابع $f(x) = \frac{2ax - 1}{x + b}$ باشد، نقطه برخورد و مجانب های تابع $g(x) = \frac{2bx + 1}{x - a}$ کدام است؟

- (۱) $(3, -2)$ (۲) $(3, -4)$ (۳) $(\frac{3}{2}, -4)$ (۴) $(\frac{3}{2}, -2)$

پاسخنامه

۱- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$y = -2 + f\left(3 + \frac{x}{4}\right) \quad \text{قرینه نسبت به مبدا}$$

$$y = -2 + f\left(3 + \frac{x}{4}\right) + 2 \quad \text{دو واحد بالا}$$

$$y = f\left(3 + \frac{x-k}{4}\right) \quad \text{ک واحد راست}$$

$$y = f\left(3 + \frac{2x-k}{4}\right) \quad \text{طول نقاط نصف}$$

$$\rightarrow f\left(3 + \frac{2x-k}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\rightarrow 3 + \frac{2x-k}{4} = \frac{x}{2} \quad \rightarrow k = 12$$

۲- پاسخ: گزینه‌ی ۲

نقطه $A\left(3, \frac{1}{2}\right)$ روی خط $y = -\frac{1}{4}x + 2$ داده شده است.

$$y = 2 - \frac{1}{4}f\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

پس $A'\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ است.

$$x + y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

۳- پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$(x-a)^2 + b = f(x)$$

$$2 \text{ واحد انتقال به چپ} \rightarrow a = -2$$

$$f(0) = 1 \rightarrow (0+2)^2 + b = 1$$

$$x + b - 4a = x - 7 - 4(-2) = x + 1$$

$$b = -7$$

$$f \circ f(-1) = -71$$

باقی مانده تقسیم $f \circ f(x)$ بر $x + 1$ برابر است با $f \circ f(-1)$.

۴- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases} f(x+1) = (x-1)g(x) + R \\ f(x-1) = (x-2)h(x) + R \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \rightarrow f(2) = R \\ x=2 \rightarrow f(1) = R \end{cases} \rightarrow f(2) = f(1)$$

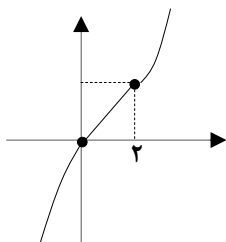
$$\rightarrow 64 - 64 + 4 + 2a + 4 = 1 - 8 + 1 + a + 4$$

$$\rightarrow a = -10$$

۵- پاسخ: گزینه‌ی ۳

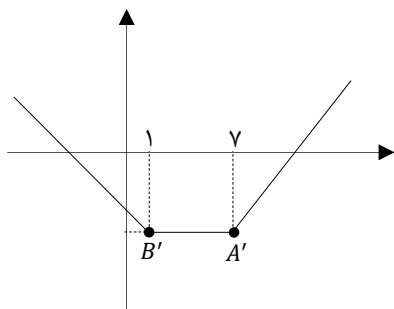
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (a-2)x & x \geq 2 \\ -x^2 + (a-2)x & x < 2 \end{cases}$$

باید در هر ضابطه، راس سهمی خارج بازه باشد.



$$\begin{cases} S_1 = \frac{2-a}{2} \leq 2 \\ S_2 = \frac{2+a}{2} \geq 2 \end{cases} \rightarrow 2 \leq a$$

۶- پاسخ: گزینه‌ی ۴

 نقاط $A(-1, 3)$ و $B(2, 3)$ روی $y = f(x-1)$ با نقاط $A'(7, -6)$ و $B'(1, -6)$ روی $y = -2f\left(\frac{7-x}{2}\right)$ متناظرند.

 در بازه $[7, +\infty)$ اکیدا صعودی است.

۷- پاسخ: گزینه ۱

تابع f اکیدا نزولی است پس :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) < f(x) &\rightarrow f(x) > x \\ \rightarrow 6 - 2x > x &\rightarrow x < 2 \end{aligned}$$

از طرفی شرط دامنه را بررسی می کنیم :

$$\begin{cases} x \in D_f &\rightarrow 1 \leq x \leq 4 \\ f(x) \in D_f &\rightarrow 1 \leq 6 - 2x \leq 4 \rightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

بنابراین محدوده x به صورت $1 \leq x < 2$ خواهد بود که شامل یک عدد صحیح است.

۸- پاسخ: گزینه ۲

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = 2|a| = \frac{3}{4} \rightarrow |a| = \frac{3}{8}$$

$$a = \pm \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

۹- پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} \max = c + |a| = ۶ \\ \min = c - |a| = -۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = ۲ \\ |a| = ۴ \end{cases}$$

 در $x = ۰$ تابع نزولی است. پس $ab < ۰$ است.

$$f(۰) = c + \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۲ + \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$f(۰) < ۰ \rightarrow a < ۰ \rightarrow \begin{cases} a = -۴ \\ b > ۰ \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{۳}\right) = ۶ \rightarrow ۲ - ۴\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{۳}b + \frac{\pi}{۳}\right) = ۶$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}b}{۳} + \frac{\pi}{۳}\right) = -۱ \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}b}{۳} + \frac{\pi}{۳} = \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rightarrow a + bc = -۴ + ۱ = -۳$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۲

$$f(۰) = ۲ \rightarrow a \tan \frac{\pi}{۴} = ۲ \rightarrow a = ۲$$

$$f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{۱۶}\right) = ۰ \rightarrow ۲ \tan \left(\frac{\sqrt{\pi}}{۸}b - \frac{\pi}{۴}\right) = ۰$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{۸}b - \frac{\pi}{۴} = ۰ \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{۸}b = \frac{\pi}{۴} \rightarrow b = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}$$

$$a - b = ۲ - \frac{۲}{\sqrt{\pi}} = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

$$\sin x + ۲ \sin x \cos x = ۱ + ۲ \cos x$$

$$\sin x (۱ + ۲ \cos x) = ۱ + ۲ \cos x$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ \rightarrow x = \frac{\pi}{۲} \\ ۱ + ۲ \cos x = ۰ \rightarrow \cos x = -\frac{1}{۲} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{۲} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

۱۲- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$\begin{aligned} \sin x = t &\rightarrow \Delta t - \frac{\epsilon}{t} = \gamma \\ &\rightarrow \Delta t^\gamma - \gamma t - \epsilon = 0 \\ &\rightarrow (t - 2)(\Delta t + 3) = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \sin x = 2 \times \\ t = \sin x = -\frac{3}{\Delta} \end{cases}$$

 پس $\sin \alpha = -\frac{3}{\Delta}$ و در نتیجه $\tan \alpha = \frac{3}{\epsilon}$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{3}{\epsilon} + 1}{1 - \frac{3}{\epsilon}} = \gamma$$

۱۳- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) + \cos(\pi[x])}{\sin(\pi x)} = \frac{f(1^-) + 1}{0^+} = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) < -1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) + \cos(\pi[x])}{\sin(\pi x)} = \frac{f(1^+) - 1}{0^-} = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) > 1$$

فقط نمودار گزینه ۴ دارای این دو شرط است.

۱۴- پاسخ: گزینه‌ی ۱

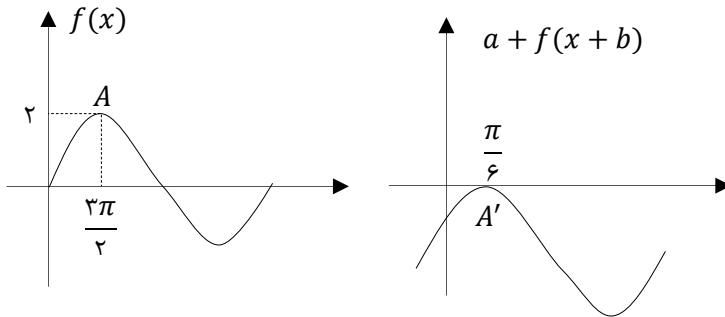
 مخرج کسر ریشه مضاعف دارد. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه مضاعف برابر $\frac{-b}{2a}$ است.

$$ax^2 + \epsilon ax + 18 = 0 \rightarrow x = b = -\frac{\epsilon a}{2a} = -3$$

$$\rightarrow ax^2 + \epsilon ax + 18 = a(x + 3)^2$$

$$\rightarrow 9a = 18 \rightarrow a = 2 \rightarrow a - 2 = 0$$

۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۲



برای آنکه نقطه A به نقطه A' منتقل شود، باید نمودار f را $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$ به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم پس $b = \frac{4\pi}{3}$ و $a = -2$ و در نتیجه $\frac{1}{\pi}ab = -\frac{8}{3}$ است.

۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۲

حالت اول: درجه مخرج از ۲ بیشتر باشد آنگاه $k = 0$ است.

حالت دوم: درجه مخرج برابر ۲ باشد.

$$m = 2, n < 2 \rightarrow k = 1$$

$$n = 2, m < 2 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$m = n = 2 \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

پس مجموع جواب‌های ممکن برای k برابر $\frac{11}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ است.

۱۷- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$x \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - 3 \right) = x \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 \right)$$

$$= x \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3x$$

$$= \sqrt{ax^2 + bx + 1} - 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + 1 - 9x^2}{\sqrt{ax^2 + bx + 1} + 3x}$$

$$a = 9 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx}{2x + 3x} = \frac{b}{6} = 2 \rightarrow b = 12$$

$$\rightarrow a + b = 21$$

۱۸- پاسخ: گزینه‌ی ۴

فرض کنید $g(x) = ax + b$ پس $g^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$

$$f(x) = k(x + 1)(x - 3)$$

$$f(0) = -6 \rightarrow f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$$

$$= 2x^2 - 4x - 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x - 6 + x(ax + b)}{1 + \frac{1}{a}(x - b)} \xrightarrow{a=-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(b - 4)x - 6}{\frac{1}{a}x} = -2(b - 4) = 6 \rightarrow b = 1$$

$$\rightarrow g(x) = -2x + 1$$

$$\rightarrow (2) = -3$$

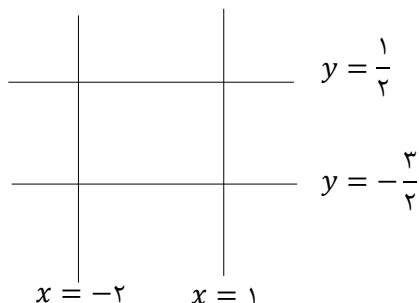
۱۹- پاسخ: گزینه‌ی ۴

مجانب های قائم: $|2x + 1| - 3 = 0 \rightarrow |2x + 1| = 3$

$$\rightarrow 2x + 1 = \pm 3 \rightarrow x = 1 \text{ یا } -2$$

مجانب های افقی: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x - 2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{-2x - 4} = -\frac{3}{2}$$



$$S = 3 \times 2 = 6$$

۲۰- پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$f(x) = \frac{2ax - 1}{x + b} \rightarrow A(-b, 2a)$$

$$\rightarrow b = -2, \quad a = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{2bx + 1}{x - a} \rightarrow A'(a, 2b)$$

$$\rightarrow A'\left(\frac{3}{2}, -4\right)$$