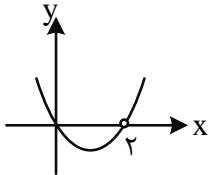


۱- دامنه تابع  $f(x) = \frac{x^3 + x - 1}{2x^2 + (b-a)x + 4b}$  به صورت  $\mathbb{R} - \{a, b\}$  است. مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲) ۲      (۳)  $-\frac{2}{3}$       (۴)  $\frac{2}{3}$



۲- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax^2 - ax + c}{x + b}$  به صورت مقابل است.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) -۶      (۳) -۸      (۴) -۱۰

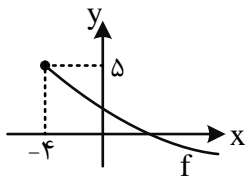
۳- برد تابع  $f(x) = x + \frac{9}{x}$  با دامنه  $(0, +\infty)$  برابر با  $[a, +\infty)$  است.  $f(a)$  کدام است؟

- (۱) ۶      (۲)  $\frac{6}{5}$       (۳) ۷      (۴)  $\frac{7}{5}$

۴- دامنه توابع  $f(x) = \sqrt{5x - x^2} - 4$  و  $g(x) = \sqrt{b - |x - a|}$  برابر هستند.  $ab$  کدام است؟ ( $b > 0$ )

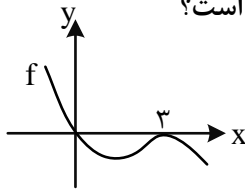
- (۱)  $\frac{15}{4}$       (۲)  $\frac{15}{2}$       (۳)  $\frac{5}{4}$       (۴)  $\frac{5}{2}$

۵- نمودار تابع  $f(x) = a - \sqrt{x + b}$  به صورت مقابل است.  $f^{-1}(3)$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$       (۲) صفر      (۳) ۲      (۴) ۴

۶- نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x^2 - 3x}}$  شامل چند عدد طبیعی است؟



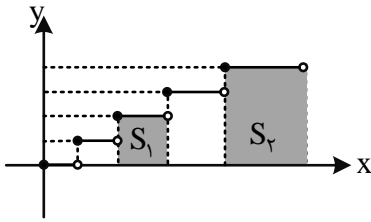
(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) بی شمار

۷- مجموع جواب‌های معادله  $[x-2] + [3-x] = 2x + 5$  کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۳/۵ (۳) -۴ (۴) -۴/۵

۸- نمودار تابع  $y = [\sqrt{x}]$  در بازه  $(0, 25]$  به صورت مقابل رسم شده است. اگر مساحت مستطیل‌های رنگی  $S_1$  و  $S_2$  باشند، مقدار  $S_2 - S_1$  کدام است؟



(۱) ۲۴ (۲) ۲۶

(۳) ۲۸ (۴) ۳۲

۹- کدام یک از توابع داده شده یک‌به‌یک است؟

(۱)  $y = x^3 - x$  (۲)  $y = x[x]$  (۳)  $y = x^3 + x$  (۴)  $y = x - |x|$

۱۰- اگر  $f(x) = x + 2\sqrt{x}$  و  $g(x) = |x| - 5x$  باشند، مقدار  $g^{-1}(f^{-1}(15))$  کدام است؟

(۱) -۱/۵ (۲) -۲/۲۵ (۳) -۲/۵ (۴) -۳

۱۱- با فرض  $f(x) = \frac{ax+1}{3x-2}$ ، تابع  $y = a + f(x)$  و وارون آن بر هم منطبق هستند.  $a$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۲ (۴) -۲

۱۲- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x - \frac{1}{\lambda x}$  با دامنه  $(0, +\infty)$  مفروض است. نمودار تابع  $f^{-1}$  نیمساز ناحیه دوم را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)       $-\frac{1}{4}$  (۳)       $-\frac{1}{2}$  (۲)       $\frac{1}{4}$  (۴)

۱۳- قرینه نمودار تابع  $f(x) = 3x + |x|$  نسبت به خط  $y = x$  به صورت  $g(x) = ax + b|x|$  است.  $a - b$  کدام است؟

- $\frac{1}{4}$  (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

۱۴- تابع  $f(x) = x^2 - 2x$  با دامنه  $(1, +\infty)$  مفروض است. قرینه نمودار این تابع نسبت به محور  $x$ ها را  $16$  واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم. فاصله نقطه برخورد تابع جدید و تابع اولیه از مبدأ مختصات کدام است؟

- $2\sqrt{5}$  (۱)       $3\sqrt{5}$  (۲)       $4\sqrt{5}$  (۳)       $6\sqrt{5}$  (۴)

۱۵- اگر  $f(x) = \begin{cases} 5-x & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 1 \\ x+1 & x \leq 1 \end{cases}$  باشند، برد تابع  $(f+g)(x)$  شامل چند عدد صحیح نیست؟

- ۶ (۱)      ۵ (۲)      ۴ (۳)      ۳ (۴)

۱۶- اگر  $f(x) = x^5 - 31$  و  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$  باشند، اختلاف ریشه‌های معادله  $(f \circ g)(x) = 1$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۶ (۲)      ۷ (۳)      ۸ (۴)

۱۷- اگر  $f(x) = 5 - \sqrt{x-2}$  باشد، دامنه fof شامل چند عدد صحیح است؟

- ۹ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۱ (۳)      ۱۲ (۴)

۱۸- اگر  $f(x) = 2^{x+|x|}$  و  $g(x) = \frac{2}{x+|x|}$  باشند، برد تابع gof(x) کدام است؟

- (۱) (۰, ۱)      (۲) (۰, ۱)      (۳) (۰, +∞)      (۴) [۱, +∞)

۱۹- نمودار تابع  $f(x) = \sqrt[3]{2^{ax+b}}$  و خط  $y = 2x$  در نقطه‌ای با عرض ۱ متقاطع هستند. اگر  $f^{-1}(8) = 5$  باشد، کدام است؟

- (۱) ۳      (۲) ۲      (۳) ۱      (۴)  $\frac{1}{2}$

۲۰- اگر تعداد جواب‌های معادله  $x^6 = 8^x$  برابر با  $\alpha$  باشد، اختلاف جواب‌های معادله  $(2 - \sqrt{\alpha})^x + (2 + \sqrt{\alpha})^x = 4$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

## پاسخنامه

### ۱- پاسخ: گزینه ۳

a و b ریشه‌های مخرج کسر هستند. به کمک روابط بین ریشه‌های معادله می‌توان نوشت:

$$ab = \frac{4b}{2} \Rightarrow ab = 2b \Rightarrow a = 2$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } \frac{a-b}{2} = a+b \xrightarrow{a=2} \frac{2-b}{2} = 2+b \Rightarrow 2-b = 4+2b \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow b = \frac{-2}{3}$$

### ۲- پاسخ: گزینه ۲

X = 2 هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج است و چون تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد، می‌توان نوشت:

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$8 + 4a - 2a + c = 0 \xrightarrow{c=0} 2a = -8 \Rightarrow a = -4$$

در آخر  $a + b = -4 + (-2) = -6$  است.

### ۳- پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم برای دو عدد مثبت a و b همواره  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  است، پس داریم:

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x\left(\frac{9}{x}\right)} \Rightarrow x + \frac{9}{x} \geq 6 \Rightarrow R_f = [6, +\infty) \Rightarrow a = 6$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$f(6) = 6 + \frac{9}{6} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

### ۴- پاسخ: گزینه ۱

دامنه توابع داده شده برابر هستند. پس داریم:

$$\Delta x - x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - \Delta x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 \leq x \leq 4$$

$$b - |x - a| \geq 0 \Rightarrow |x - a| \leq b \xrightarrow{b > 0} -b \leq x - a \leq b \xrightarrow{+a} a - b \leq a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 4 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$$

در آخر خواسته مسئله  $ab = \frac{15}{4}$  است.

### ۵- پاسخ: گزینه ۲

دامنه تابع  $[-4, +\infty)$  و برد تابع  $(-\infty, 5]$  است، پس ضابطه تابع برابر با  $f(x) = 5 - \sqrt{x+4}$  است و برای به دست آوردن مقدار

$f^{-1}(3)$  می‌توان نوشت:

$$f(x) = 3 \Rightarrow 5 - \sqrt{x+4} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+4} = 2 \Rightarrow x+4 = 4 \Rightarrow x = 0$$

### ۶- پاسخ: گزینه ۳

باید مجموعه جواب نامعادله  $\frac{f(x)}{x^2 - 3x} \geq 0$  را به دست آوریم. داریم:

$\frac{f(x)}{x(x-3)} \geq 0$	-∞	0	3	+∞
	+	+	-	-
	+	-	+	+
	+	+	-	-

ت.ن    ت.ن

دامنه تابع به صورت  $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$  است که شامل ۲ عدد طبیعی  $\{1, 2\}$  است.

**۷- پاسخ: گزینه ۴**

ابتدا معادله را ساده تر می نویسیم:

$$[x-2] + [3-x] = 2x + 5 \Rightarrow [x] - 2 + 3 + [-x] = 2x + 5 \Rightarrow [x] + [-x] = 2x + 4$$

حالا برای به دست آوردن جواب های معادله می توان نوشت:

$$x \notin \mathbb{Z} : -1 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \checkmark$$

$$x \in \mathbb{Z} : 0 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \checkmark$$

در نتیجه مجموع جواب های معادله  $-\frac{5}{2} - 2 = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$  است.

**۸- پاسخ: گزینه ۲**

نمودار تابع را رسم می کنیم و مقادیر  $S_1$  و  $S_2$  را محاسبه می کنیم. داریم:

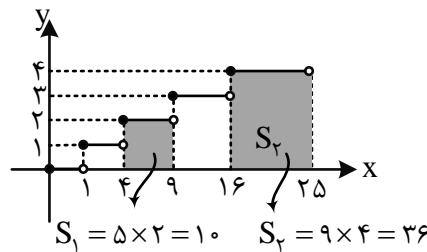
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 0$$

$$1 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \Rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \Rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$



در آخر  $S_2 - S_1 = 26$  است.

**۹- پاسخ: گزینه ۳**

در گزینه های (۱)، (۲) و (۴) به ازای یک  $y$ ، چند مقدار برای  $x$  وجود دارد، پس یک به یک نیستند:

$$1 \text{ گزینه } : y = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$2 \text{ گزینه } : y = 0 \Rightarrow x[x] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$۴ \text{ گزینه } y = 0 \Rightarrow x = |x| \Rightarrow x \geq 0$$

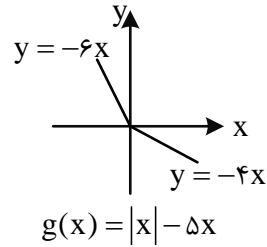
### ۱۰- پاسخ: گزینه‌ی ۱

ابتدا مقدار  $f^{-1}(۱۵)$  را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(۱۵) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = ۱۵ \Rightarrow \alpha + ۲\sqrt{\alpha} = ۱۵ \xrightarrow{\text{حدس}} \alpha = ۹$$

در نتیجه باید  $g^{-1}(۹)$  را محاسبه کنیم که برای محاسبه آن می‌توان نوشت:

$$g(x) = \begin{cases} -۶x & x < ۰ \\ -۴x & x \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow -۶x = ۹ \Rightarrow x = \frac{-۹}{۶} = -\frac{۳}{۲} = -۱/۵$$



### ۱۱- پاسخ: گزینه‌ی ۲

ابتدا ضابطه تابع  $y = a + f(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$y = a + f(x) = a + \frac{ax + 1}{3x - 2} = \frac{3ax - 2a + ax + 1}{3x - 2} = \frac{4ax - 2a + 1}{3x - 2}$$

تابع به دست آمده و وارون آن بر هم منطبق هستند، پس داریم:

$$4a + (-2) = 0 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

### ۱۲- پاسخ: گزینه‌ی ۴

باید جواب معادله  $f^{-1}(x) = -x$  را به دست آوریم، پس داریم:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{1}{8x} = x \Rightarrow 2x = \frac{1}{8x} \Rightarrow 16x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} A\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

### ۱۳- پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases} \text{ است و می‌توان نوشت:} \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \text{ ضابطه } f \text{ به صورت}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0: ax + bx = \frac{x}{4} \Rightarrow a + b = \frac{1}{4} \\ x < 0: ax - bx = \frac{x}{2} \Rightarrow a - b = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{8}, b = -\frac{1}{8}$$

$$\Delta a - b = \frac{15}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{16}{8} = 2$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

**۱۴- پاسخ: گزینه‌ی ۳**

ابتدا ضابطه تابع جدید را به دست می‌آوریم:

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = 2x - x^2 \xrightarrow{16 \text{ واحد به بالا}} y = 2x - x^2 + 16$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$x^2 - 2x = 2x - x^2 + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه برخورد } A(4, 8)$$

$$\xrightarrow{\text{فاصله از مبدأ}} OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

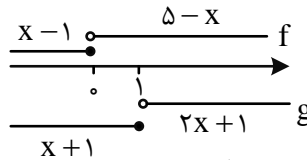
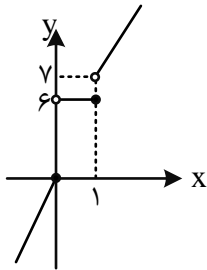
**۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۱**

 ضابطه  $(f+g)(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$x \leq 0 \Rightarrow (f+g)(x) = x - 1 + x + 1 = 2x$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow (f+g)(x) = 5 - x + x + 1 = 6$$

$$x > 1 \Rightarrow (f+g)(x) = 5 - x + 2x + 1 = x + 6$$


 در نتیجه نمودار  $(f+g)(x)$  به صورت زیر است:


در نتیجه برد تابع شامل ۶ عدد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، نیست.

**۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۴**

 ابتدا باید معادله  $f(x) = 1$  را حل کنیم. داریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow x^5 - 31 = 1 \Rightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2$$

 در نتیجه  $g(x) = 2$  است و می‌توان نوشت:

$$x \leq 1: x^2 - 7 = 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x > 1: \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

 در نتیجه اختلاف جواب‌های معادله  $5 - (-3) = 8$  است.

**۱۷- پاسخ: گزینه‌ی ۲**

 دامنه تابع  $f$  به صورت  $x \geq 2$  است، پس داریم:

$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

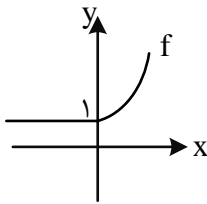
$$\xrightarrow{x \geq 2} \downarrow 5 - \sqrt{x-2} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 3 \Rightarrow x-2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 11$$

 که شامل ۱۰ عدد صحیح  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  است.

**۱۸- پاسخ: گزینه‌ی ۱**

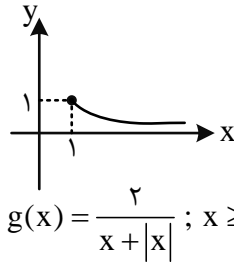


ابتدا برد تابع  $f(x) = 2^{x+|x|}$  را به دست می آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{2x} & x \geq 0 \\ 2^0 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4^x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow R_f = [1, +\infty)$$


حالا نمودار  $g(x) = \frac{2}{x+|x|}$  را با دامنه  $[1, +\infty)$  رسم می کنیم و برد آن را تعیین می کنیم:

$$x \geq 1 \Rightarrow g(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$



در نتیجه برد  $g \circ f(x)$  به صورت  $(0, 1]$  است.

**۱۹- پاسخ: گزینه ی ۱**

نقطه برخورد  $f$  و خط  $y = 2x$  به صورت  $(\frac{1}{2}, 1)$  است، پس  $f(\frac{1}{2}) = 1$  است و داریم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sqrt[2]{2^{\frac{a}{2}+b}} = 1 \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow a = -2b$$

از طرفی،  $f^{-1}(8) = 5$  است، پس می توان نوشت:

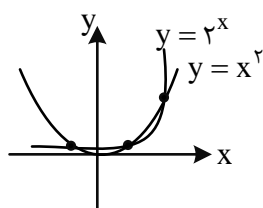
$$f(5) = 8 \Rightarrow \sqrt[2]{2^{\Delta a + b}} = 8 \Rightarrow 2^{\Delta a + b} = 2^9 \Rightarrow \Delta a + b = 9$$

$$\xrightarrow{a = -2b} -1 \cdot b + b = 9 \Rightarrow -9b = 9 \Rightarrow b = -1, a = 2$$

در آخر  $a - b = 2 - (-1) = 3$  است.

**۲۰- پاسخ: گزینه ی ۱**

برای به دست آوردن مقدار  $\alpha$  می توان نوشت:

$$x^6 = 8^x \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} x^2 = 2^x \Rightarrow \alpha = 3$$


پس باید معادله  $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4$  را حل کنیم، داریم:

$$(2 - \sqrt{3})^x = t \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = 12} \begin{cases} t = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = -1 \\ t = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

در نتیجه اختلاف جواب های معادله برابر با  $2 - (-1) = 3$  است.

