

(۱) اگر  $\tan \alpha = \sqrt{5} \sin \alpha$  و  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد،  $\tan \alpha - \cot \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{5}{2}$

(۲) اگر  $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = 2$  باشد،  $\frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(۳) اگر  $\sin x + \cos x = +\frac{2}{y}$  باشد،  $\frac{\sin x}{1 + \cot x} + \frac{\cos x}{1 + \tan x}$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{2}{5}$

(۴) اگر  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{3}$  باشد،  $\cot^2 \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) ۴

(۵) اگر  $\tan \alpha = \cos \alpha$  باشد، حاصل  $|\sin \alpha - \cos \alpha| - |\sin \alpha + \cos \alpha|$  ( $135^\circ < \alpha < 180^\circ$ )

- (۱)  $-1 + \sqrt{3}$  (۲)  $-1 + \sqrt{5}$  (۳)  $1 + \sqrt{3}$  (۴)  $1 + \sqrt{5}$

(۶) اگر  $\tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} = a$  و  $\tan \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} = b$  باشند، کدام رابطه بین  $a$  و  $b$  برقرار است؟

- (۱)  $a + b = 1$  (۲)  $a + b = -1$  (۳)  $ab = -1$  (۴)  $ab = 1$

(۷) حاصل  $\frac{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan^2 \alpha$  (۲)  $\cot^2 \alpha$  (۳)  $\tan^4 \alpha$  (۴)  $\cot^4 \alpha$

(۸) اگر  $\sin x = \frac{1}{3 \cos x}$  باشد،  $\frac{\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan^2 x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{5}{6}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

(۹) اگر  $a < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{-a} \sqrt[3]{(-a)^4} \sqrt{a^2}$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{-a}$  (۲)  $-a$  (۳)  $-\sqrt[3]{a}$  (۴)  $-\sqrt{-a}$

(۱۰) اگر  $m - \sqrt[n]{2} = x$  باشد،  $\frac{x^m + x^n}{2x^m - x^n}$  کدام است؟ ( $m > n$ )

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۳

(۱۱) مقدار  $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - 1 \sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2}$  چقدر از  $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9\sqrt{3}})(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}})$  بیشتر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(۱۲) اگر  $A = \sqrt{(2 - \sqrt{3})(7 - \sqrt{48})}$  باشد،  $A^2 - 4A$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

(۱۳) اگر  $\sqrt{x - 2m} + \sqrt{x} = 2$  و  $\sqrt{x - 2m} - \sqrt{x} = \frac{m+1}{2}$  باشند،  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

(۱۴) اگر  $a^2 = \frac{11}{a - 3b}$  و  $b^2 = \frac{53}{3a - b}$  باشد،  $\sqrt{a - b}$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۹

(۱۵) اگر  $3 = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$  باشد،  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$       (۲)  $-\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴)  $-\frac{2}{3}$

(۱۶) ساده شده عبارت  $\frac{x^2 + 4x^2 + 7x + 6}{x^2 - 4} \div \frac{x^2 + 2x + 3}{2 - x}$  کدام است؟

- (۱)  $x$       (۲)  $-x$       (۳)  $1$       (۴)  $-1$

(۱۷) حاصل  $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{195} + \sqrt{196}}$  کدام است؟

- (۱)  $12$       (۲)  $13$       (۳)  $14$       (۴)  $15$

(۱۸) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله  $x^2 - x - 3 = 0$  باشند،  $(\alpha^2 - \alpha - 1)(\beta^2 - \beta + 1)$  کدام است؟

- (۱)  $8$       (۲)  $12$       (۳)  $15$       (۴)  $18$

(۱۹) معادلات  $x^2 + 3x + m = 0$  و  $x^2 + 5x + 3m = 0$  دارای یک جواب مشترک غیرصفر هستند. مجموع مربعات جواب‌های غیر

مشترک کدام است؟

- (۱)  $15$       (۲)  $12$       (۳)  $10$       (۴)  $8$

(۲۰) اگر  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح و  $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$  جواب معادله  $2x^2 + ax + b = 0$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

- (۱)  $3$       (۲)  $-3$       (۳)  $1$       (۴)  $-1$



درسنامه:

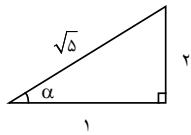


## یاسخنامه

۱- پاسخ: گزینه‌ی ۳

پس داریم  $\tan \alpha = \sqrt{\delta} \sin \alpha$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{\delta} \sin \alpha \rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{\delta} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$



$$\xrightarrow{\text{ناحیه چهارم } \alpha} \begin{cases} \tan \alpha = -2 \\ \cot \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

۲- پاسخ: گزینه‌ی ۴

است پس داریم:  $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = 2$

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \rightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} = 2 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \rightarrow \tan x = 2$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$\frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{2 \tan x + 1}{\tan x - 1} = \frac{2(2) + 1}{2 - 1} = \frac{5}{1} = 5$$

۳- پاسخ: گزینه‌ی ۲

برای به دست آوردن خواسته مسئله با توجه به اینکه  $\sin x + \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1 + \cot x} + \frac{\cos x}{1 + \tan x} &= \frac{\sin x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} + \frac{\cos x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} + \frac{\cos x}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

۴- پاسخ: گزینه‌ی ۱

طبق فرض مسئله  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{3}$  است. پس داریم:

$$\sin^r \alpha - \cos^r \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow (\sin^r \alpha - \cos^r \alpha)(\underbrace{\sin^r \alpha + \cos^r \alpha}_{=1}) = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \sin^r \alpha - \cos^r \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \sin^r \alpha - (1 - \sin^r \alpha) = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow 2 \sin^r \alpha - 1 = \frac{1}{3} \rightarrow 2 \sin^r \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \sin^r \alpha = \frac{2}{3}$$

برای به دست آوردن مقدار  $\cot^r \alpha$  می توان نوشت:

$$1 + \cot^r \alpha = \frac{1}{\sin^r \alpha} \rightarrow 1 + \cot^r \alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \cot^r \alpha = \frac{1}{2}$$

۵- پاسخ: گزینه ی ۲

وقتی  $180^\circ < \alpha < 135^\circ$  است،  $\sin \alpha > 0$  و  $\cos \alpha < 0$  و همچنین  $|\sin \alpha| < |\cos \alpha|$  است. حالا چون

$\tan \alpha = \sin \alpha$  است، می توان نوشت:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin \alpha \rightarrow \cos^r \alpha = \sin \alpha \rightarrow 1 - \sin^r \alpha = \sin \alpha$$

$$\rightarrow \sin^r \alpha + \sin \alpha - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=5} \begin{cases} \sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \times$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$\begin{aligned} & |\underbrace{\sin \alpha - \cos \alpha}_+| - |\underbrace{\sin \alpha + \cos \alpha}_-| = \sin \alpha - \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha \\ & = 2 \sin \alpha = 2 \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) = -1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

۶- پاسخ: گزینه ی ۳

با ضرب طرفین معادله در هم می توان نوشت:

$$\left( \tan \alpha - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \left( \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) = ab \xrightarrow{\text{مزدوج}} \tan^r \alpha - \frac{1}{\cos^r \alpha} = ab$$

$$\rightarrow \tan^r \alpha - (1 + \tan^r \alpha) = ab \rightarrow ab = -1$$

۷- پاسخ: گزینه ی ۱

برای به دست آوردن خواسته مسئله می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\tan^r \alpha - \sin^r \alpha}{\cot^r \alpha - \cos^r \alpha} &= \frac{\sin^r \alpha \left( \frac{1}{\cos^r \alpha} - 1 \right)}{\cos^r \alpha \left( \frac{1}{\sin^r \alpha} - 1 \right)} = \frac{\cancel{\sin^r \alpha} (\cancel{1} + \tan^r \alpha)}{\cancel{\cos^r \alpha} (\cancel{1} + \cot^r \alpha)} \\ &= \frac{\sin^r \alpha \cdot \tan^r \alpha}{\cos^r \alpha \cdot \cot^r \alpha} = \tan^r \alpha \cdot \frac{\tan^r \alpha}{\frac{1}{\tan^r \alpha}} = \tan^r \alpha \end{aligned}$$

۸- پاسخ: گزینه ی ۴

طبق فرض مسئله  $\sin x = \frac{1}{3 \cos x}$  است. پس داریم:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \rightarrow \sqrt{\cos x} \sin x = 1 \rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با :

$$\frac{\sin^{\sqrt{x}}}{1 + \cot^{\sqrt{x}}} + \frac{\cos^{\sqrt{x}}}{1 + \tan^{\sqrt{x}}} = \frac{\sin^{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sin^{\sqrt{x}}}} + \frac{\cos^{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\cos^{\sqrt{x}}}} = \sin^{\sqrt{x}} \cos^{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\cos x} \sin x = 1 - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\cos x}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

۹- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$a < 0$  است پس داریم :

$$\sqrt{-a} \sqrt[4]{(-a)^{\sqrt{x}}} \sqrt{a^{\sqrt{x}}} = \sqrt{-a} \sqrt[4]{a^{\sqrt{x}} |a|} = \sqrt{-a} \sqrt[4]{a^{\sqrt{x}} (-a)} = \sqrt{-a} \sqrt[4]{-a^{\sqrt{x}+1}} = \sqrt{-a(-a)} = \sqrt{a^{\sqrt{x}+1}} = |a|^{\frac{\sqrt{x}+1}{2}} = -a$$

۱۰- پاسخ: گزینه‌ی ۳

چون  $\sqrt[m-n]{x} = x$  است، می‌توان نتیجه گرفت  $x^{m-n} = 2$  است و در نتیجه داریم :

$$\frac{x^m + x^n}{\sqrt{x^m - x^n}} = \frac{x^n (x^{m-n} + 1)}{x^n (\sqrt{x^{m-n} - 1})} = \frac{2+1}{\sqrt{2-1}} = \frac{3}{1} = 3$$

۱۱- پاسخ: گزینه‌ی ۲

مقدار هر یک از عبارت‌ها را به صورت جداگانه به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{9-8} = \sqrt[4]{1} = 1$$

$$(\sqrt{2}-\sqrt[4]{\sqrt{3}\sqrt{3}})(\sqrt[4]{\sqrt{3}+9\sqrt{3}}) = (\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2-3 = -1$$

در آخر خواسته مسئله  $1 - (-1) = 2$  است.

۱۲- پاسخ: گزینه‌ی ۴

به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$A = \sqrt{(2-\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \sqrt{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^3} = 2-\sqrt{3}$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$A^{\sqrt{x}} - 4A = (A-2)^{\sqrt{x}} - 4 = (2-\sqrt{3}-2)^{\sqrt{x}} - 4 = 3-4 = -1$$

۱۳- پاسخ: گزینه‌ی ۱

با ضرب طرفین معادله در هم و استفاده از اتحاد مزدوج، می‌توان نوشت:

$$\underbrace{(\sqrt{x-2m}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2m}+\sqrt{x})}_{\text{مزدوج}} = \left(\frac{m+1}{2}\right)(2) \rightarrow x-2m-x = m+1$$

$$\rightarrow 3m = -1 \rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

۱۴- پاسخ: گزینه‌ی ۲

با طرفین وسطین کردن معادلات داده شده، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a^r = \frac{11}{a-3b} \rightarrow a^r - 3a^r b = 11 \\ b^r = \frac{53}{3a-b} \rightarrow 3ab^r - b^r = 53 \end{cases} \xrightarrow{+} a^r - 3a^r b + 3ab^r - b^r = 64$$

اتحاد مکعب دو جمله‌ای  $\rightarrow (a-b)^r = 64 \rightarrow a-b = 4$

در نتیجه خواسته مسئله  $\sqrt{a-b} = 2$  است.

۱۵- پاسخ: گزینه‌ی ۴

با فرض  $A = \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}$  ، با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$(\underbrace{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1}}_A) (\underbrace{\sqrt[3]{x^2-2x+1} + \sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{x^2+2x+1}}_3) = x-1-x-1 = -2$$

$$3A = -2 \rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

۱۶- پاسخ: گزینه‌ی ۴

$x = -2$  عبارت  $x^2 + 4x^2 + 7x + 6$  را صفر می‌کند. پس داریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x^2 + 7x + 6 \quad |x+2 \\ -x^2 - 2x^2 \quad \quad x^2 + 2x + 3 \\ \hline 2x^2 + 7x + 6 \\ -2x^2 - 4x \quad \quad \quad \\ \hline 3x + 6 \\ -3x + 6 \\ \hline \dots \end{array}$$

در نتیجه می‌توان نوشت :

$$\frac{(x+2)(x^2+4x+3)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{2-x}{x^2+2x+3} = \frac{2-x}{x-2} = -1$$

۱۷- پاسخ: گزینه‌ی ۲

با گویا کردن مخرج هر یک از کسرها می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

⋮

$$\frac{1}{\sqrt{195}+\sqrt{196}} \times \frac{\sqrt{195}-\sqrt{196}}{\sqrt{195}-\sqrt{196}} = \frac{\sqrt{195}-\sqrt{196}}{195-196} = \frac{\sqrt{195}-\sqrt{196}}{-1} = \sqrt{196}-\sqrt{195}$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با :

$$\sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \dots + \sqrt{196}-\sqrt{195} = \sqrt{196}-1 = 14-1 = 13$$



## ۱۸- پاسخ: گزینه‌ی ۱

جواب های هر معادله در آن معادله صدق می کنند پس داریم:

$$\alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \rightarrow \alpha^2 - \alpha = 3, \quad \beta^2 - \beta - 3 = 0 \rightarrow \beta^2 - \beta = 3$$

در نتیجه خواسته مسئله برابر است با:

$$(\underbrace{\alpha^2 - \alpha}_{3} - 1)(\underbrace{\beta^2 - \beta}_{3} + 1) = (3)(4) = 12$$

## ۱۹- پاسخ: گزینه‌ی ۳

برای به دست آوردن ریشه مشترک معادلات، داریم:

$$x^2 + 5x + 3m = x^2 + 3x + m \rightarrow 2x = -2m \rightarrow x = -m$$

پس برای به دست آوردن مقدار  $m$ ، می توان نوشت:

$$x = -m \rightarrow m^2 - 3m + m = 0 \rightarrow m^2 - 2m = 0 \rightarrow m(m - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 & \times \\ m = 2 \end{cases}$$

در نتیجه معادلات و جواب های آن ها به صورت زیر تعبیر می شوند:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow (x + 2)(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

در نتیجه خواسته مسئله  $(-1)^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$

## ۲۰- پاسخ: گزینه‌ی ۲

$x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$  جواب معادله با ضرایب صحیح است. پس داریم:

$$x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \rightarrow 2x = 1 - \sqrt{3} \rightarrow 2x - 1 = -\sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x^2 - 4x + 1 = 3$$

$$\rightarrow 4x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

در نتیجه  $a + b = -3$  و  $b = -1$ ،  $a = -2$  است.