

۱- نمودار تابع $y = 2 - f(3 - \frac{x}{4})$ را نسبت به مبدا مختصات قرینه کرده، دو واحد به بالا و k واحد به راست انتقال داده ایم و سپس طول نقاط را نصف می کنیم. اگر نمودار نهایی بر نمودار $y = f(\frac{x}{4})$ منطبق باشد، k کدام است؟

$$x - k$$

$$12$$

$$3$$

$$4$$

$$2x$$

$$6$$

$$f(x) \rightarrow -f(-x)$$

$$y = -2 + f(3 - \frac{-x}{4}) + 2$$

$$y = -2 + f(3 + \frac{x-k}{4}) + 2$$

$$y = f(3 + \frac{x-k}{4})$$

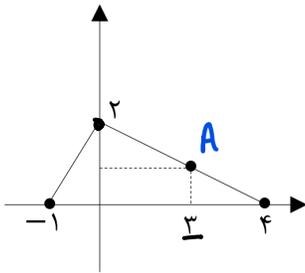
$$f(3 + \frac{x-k}{4}) = f(\frac{x}{4}) \rightarrow$$

$$3 + \frac{x-k}{4} = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{12 + x - k}{4} = \frac{x}{4}$$

$$12 + x - k = x$$

$$k = 12$$

۲- نمودار تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{4})$ به صورت مقابل است. نقطه A واقع بر این نمودار، با نقطه A' واقع بر نمودار $y = f(x)$ متناظر است. مجموع مختصات A' کدام است؟



$$A \rightarrow (1, \frac{1}{2})$$

$$y = f(x) \rightarrow (x, y)$$

$$f(1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

$$f(\frac{x}{4}) = (x, y)$$

$$f(\frac{x-4}{4}) = (x-4, y)$$

$$\frac{x-4}{4} = 1 \rightarrow x-4 = 4$$

$$x = 8$$

$$f(x) = (A', B')$$

$$8 - 4 = f(\frac{x}{4}) = (2A', -3B' + 2)$$

$$2A' = 4 \rightarrow A' = 2$$

$$-3B' + 2 = \frac{1}{2} \rightarrow -3B' = -\frac{3}{2} \rightarrow B' = \frac{1}{2}$$

$$(0, 2)$$

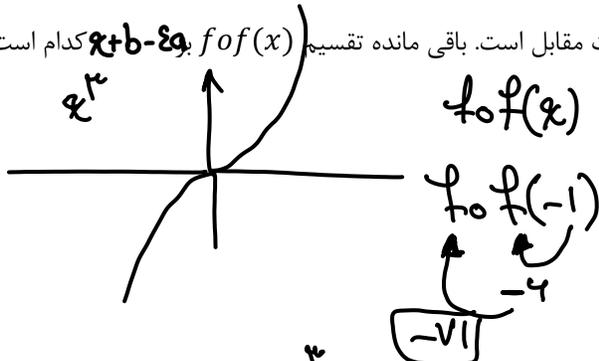
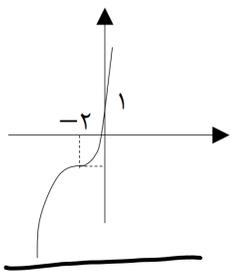
$$(4, 0)$$

$$ax + b \rightarrow b = 2$$

$$4a + 2 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{2}$$

۳- نمودار تابع $f(x) = (x-a)^2 + b$ به صورت مقابل است. باقی مانده تقسیم $f \circ f(x)$ بر $x^2 + b - \varepsilon$ کدام است؟



-4ε (۲) -v (۱)
-5v (۳) -۶ (۳)

$$x - v - (x - 1)$$

$$x - v + 1 = \boxed{x + 1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{-1}$$

$$(x+1)^2 + k$$

$$(b+1)^2 + k = 1$$

$$1 + k = 1 \rightarrow \boxed{k = -1}$$

$$\underbrace{-1 + 5}_{-2 + 5} (x+1)^2 - v = f(x)$$

$$x - a = x + 1$$

$$\boxed{a = -1} \quad \boxed{b = -1}$$

۴- چند جمله ای $f(x) = x^3 - 11x^2 + x^2 + ax + 4$ مفروض است. اگر باقی مانده تقسیم $f(x+1)$ بر $(x-1)$ باقی مانده تقسیم $f(x-1)$ بر $(x-2)$ برابر باشد مقدار a کدام است؟

$$x-1=0 \quad f(1) = \dots$$

$$\boxed{x=1}$$

$$x-2=0 \quad f(2) = \dots$$

$$\boxed{x=2}$$

$$f(1) = f(2)$$

$$\frac{f(2)}{f(1)}$$

$$4x^3 - 9x^2 + 1x + 1a + 4 = 1 - 11 + 1 + a + 4$$

$$4a + 1 = a - 1$$

$$\boxed{a = -1}$$

۵- تابع $f(x) = x|x-2| + ax$ در مجموعه اعداد حقیقی اکیدا صعودی است. حدود a کدام است؟

$$a \leq 1 \quad (۴)$$

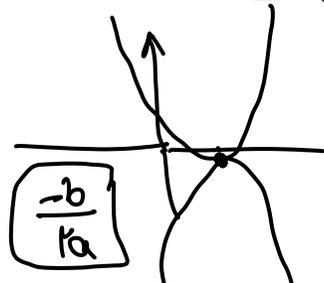
$$a \geq 2 \quad (۱)$$

$$a \geq 1 \quad (۲)$$

$$a \leq 2 \quad (۱)$$

$$x > 2 \rightarrow x^2 - 2x + ax \rightarrow \boxed{x^2 + (a-2)x}$$

$$x < 2 \rightarrow -x^2 + 2x + ax \rightarrow \boxed{-x^2 + (a+2)x}$$



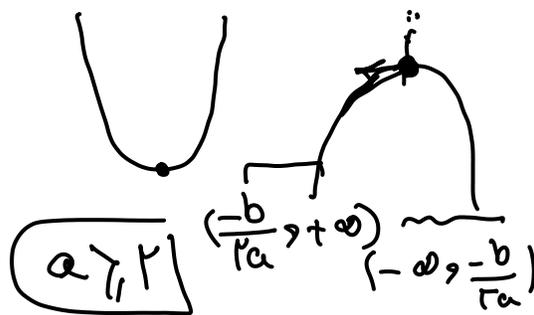
$$\frac{-(a-2)}{2} \leq 2 \rightarrow -(a-2) \leq 4$$

$$\frac{-(a+2)}{2} \geq -2 \rightarrow a+2 \geq 4$$

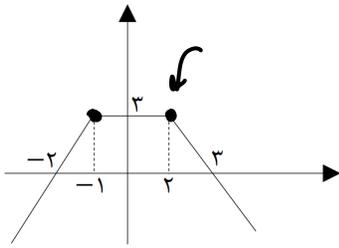
$$\boxed{a \geq 2}$$

$$-a+2 \leq 2$$

$$\boxed{-2 \leq a}$$



۶- نمودار تابع $y = f(x-1)$ به صورت مقابل است. اگر تابع $y = 2f\left(\frac{x-1}{2}\right)$ در بازه $[a, +\infty)$ کیدا یکنوا باشد حداقل a کدام است؟



۳ (۲)
۶ (۳)

$$f(x-1) \begin{cases} [2, +\infty) \\ (-\infty, -1] \end{cases} \rightarrow f(x) \begin{cases} (1, +\infty) \\ (-\infty, -2] \end{cases} \rightarrow 2f\left(\frac{x-1}{2}\right) \begin{cases} (-\infty, 1] \\ [7, +\infty) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2A+3}$$

A

$$\frac{x-1}{2} = A \rightarrow 2A = x-1$$

$$2A - 1 = -x$$

$$-2A + 1 = x$$

۷- تابع $f(x) = 6 - 2x$ با دامنه $[1, 4]$ مفروض است. مجموعه جواب نامعادله $f \circ f(x) < f(x)$ چند جواب صحیح دارد؟

۲ بی شمار

۴ (۳)

۳ (۲)

$$D_{f \circ f(x)} = 1 < x < 4$$

$$1 < 4 - 2x < 4$$

$$-2 < -2x < -2$$

$$2 > x > 1$$

$$4 - 2(4 - 2x) < 4 - 2x$$

$$4 - 8 + 4x < 4 - 2x$$

$$4x < 8 \rightarrow x < 2$$

۸- دوره تناوب تابع $f(x) = 2 - a - \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ برابر $\frac{2}{a}$ است. اختلاف ماکزیمم و مینیمم a چقدر است؟

۳ (۴)

$\frac{2}{a}$ (۳)

$\frac{2}{a}$ (۱)

$$a = \pm \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a} - \left(-\frac{2}{a}\right)$$

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a} = \frac{2}{a}$$

$$\cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$2\pi \times \frac{2}{a} \times \frac{1}{\pi}$$

$$\cos(x)$$

$$\cos(2x)$$

$$\cos(ax)$$

$$2\pi$$

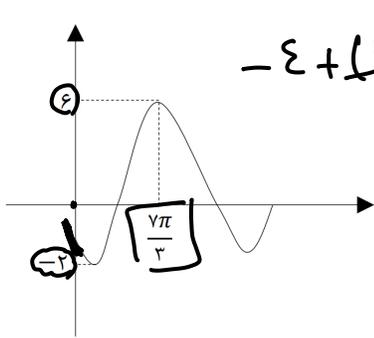
$$\pi$$

$$\frac{2\pi}{a}$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\frac{2\pi}{a} x = \frac{2x}{a} \rightarrow a = \pm \frac{2}{a}$$

۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = c + a \sin(bx + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. حاصل $a + bc$ کدام است؟



$$-2 + \left(\frac{1}{c}\right)(f) = -2 \quad a \cos(bx + \frac{\pi}{4}) \cdot b$$

$$ab < 0$$

۳ (۲)

۵ (۱)

$$\frac{\sqrt{x}}{\pi} \times b = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{c}}{c} \times b + \frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{c}}{c} \times b = \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi}$$

$$\max = c + |a| = 4$$

$$\min = c - |a| = -2$$

$$2c = 2 \rightarrow c = 1$$

$$|a| = 2$$

$$a = -2$$

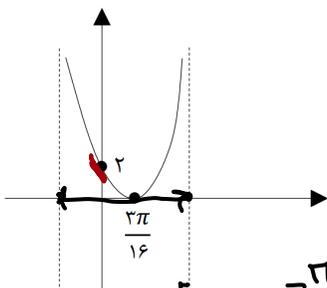
$$b > 0$$

$$f(0) = 2 + \left(a \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\right) < 0 \rightarrow a < 0$$

$$2 - 2 \sin\left(bx \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$\sin\left(bx \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \rightarrow \frac{7\pi}{4}$$

۱۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \tan^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right)$ به صورت مقابل است. حاصل $a - b$ کدام است؟



$$a \tan^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = 2$$

۴ (۲)

۴ (۱)

$$2 \tan^2\left(2bx - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \tan^2\left(\frac{7\pi}{16} b - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{16} b - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 - \frac{2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{7\pi}{16} b - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\frac{7\pi}{16} b = \frac{\pi}{4}$$

$$b = \frac{4}{16}$$

۱۱- مجموع جواب های معادله $\sin x + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$\frac{3\pi}{2}$ (۴)

$\frac{5\pi}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ (۲) ✓

$\frac{4\pi}{3}$ (۱)

$\sin x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \cos x$

$\sin x (1 + 2 \cos x) = 1 + 2 \cos x \rightarrow \boxed{\sin x = 1}$

$\begin{cases} 1 + 2 \cos x = 0 \rightarrow 2 \cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\frac{2\pi}{3}} \\ \sin x = 1 \rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \boxed{\frac{7\pi}{6}}$

۱۲- اگر α کوچک ترین جواب مثبت معادله $\frac{6}{\sin x} = \Delta \sin x - \gamma$ باشد، حاصل $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

$\frac{6 \sin^2 x - \gamma}{\sin x} = \gamma \rightarrow 6 \sin^2 x - \gamma = \gamma \sin x$

$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$

$a x^2 + b x + c = 0$

$6 \sin^2 x - \gamma \sin x - \gamma = 0$

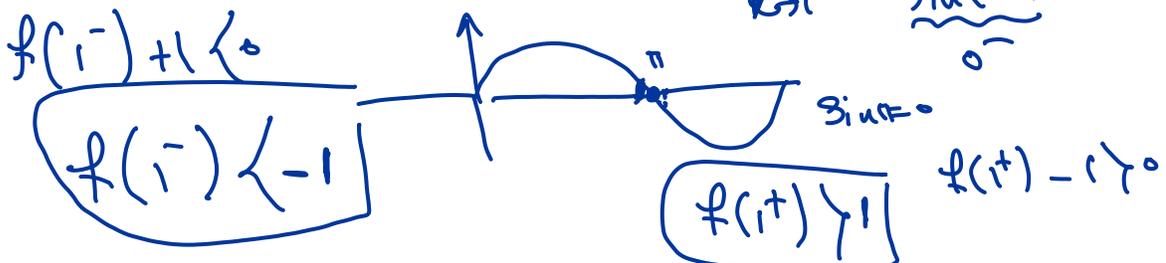
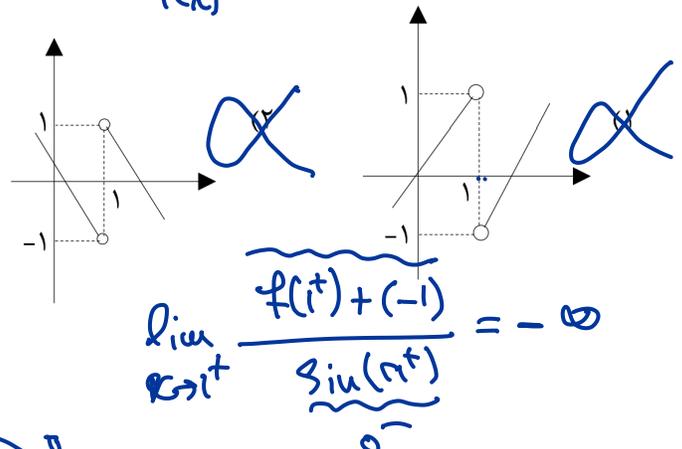
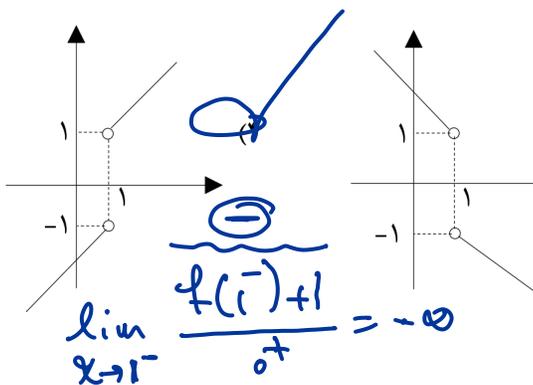
$\frac{\frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \gamma$

$(6 \sin x + \gamma)(\sin x - \gamma) = 0$
 $\sin x = -\frac{\gamma}{6}$ $\sin x = \gamma$

$\sin x = -\frac{\gamma}{6}$ $\tan \alpha = \frac{\gamma}{\frac{\gamma}{6}}$

$(\sin x - \gamma)(6 \sin x + \gamma) = 0$

۱۳- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \cos(\pi/x)}{\sin(\pi x)} = -\infty$ باشد، کدام می تواند باشد؟



$$\begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

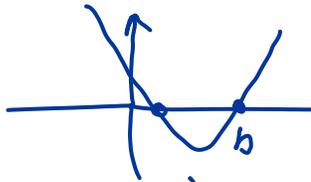
$$2 - (-2) = 4$$

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

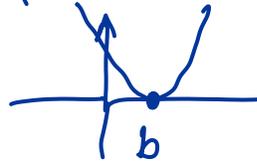
$$\sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot 1} = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ \Delta &= 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \\ \sqrt{\Delta} &= 0 \\ x &= \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 0}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

؟ کدام $a - b$ حاصل باشد، $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x+1}{ax^2+6ax+11} = -\infty$ اگر $-1 \neq$



$$\begin{aligned} b^+ &\rightarrow 0^+ + \infty \\ b^- &\rightarrow 0^- - \infty \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b^+ &\rightarrow 0^+ \\ b^- &\rightarrow 0^- \end{aligned}$$

$$\frac{-a}{2a^2 + 12a + 11} \leftarrow (2)(2^2 + 4(2) + 11)$$

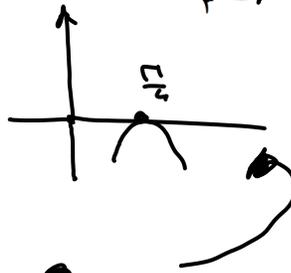
۱۵- تابع $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$ را با دامنه $[0, 6\pi]$ در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{a+f(x+b)} = 0$ حاصل $\frac{1}{\pi} ab$ کدام است؟

$$f(x) (A, B)$$

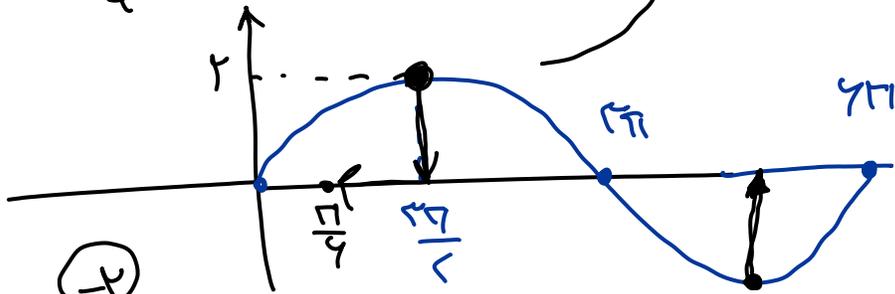
$$\sin x$$

$$f\left(\frac{x}{\mu}\right) (A, B)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \\ \frac{\pi}{2} - \end{aligned} \rightarrow 0^-$$



$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \\ \sin \frac{x}{\mu} &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{2\pi}{\mu} \end{cases}$$

$$-1 \times \frac{2\pi}{\mu} \times \frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu^2}$$

$$a + f(x+b) \rightarrow a + 2 \sin \frac{x+b}{\mu}$$

$$\sin x$$

$$\frac{\pi}{\mu} + b = \frac{\pi}{\mu} \rightarrow \frac{\pi}{\mu} + \mu b = \pi$$

$$\mu b = \frac{1\pi}{\mu} \rightarrow b = \frac{2\pi}{\mu}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + 1 = \frac{2}{r} + 1 = \frac{11}{4}$$

عدد طبیعی باشند، مجموع جواب های ممکن برای k کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - rx + 1}{x^m + rx^n + r} = k$ اگر $n > m$ و n, m دو عدد طبیعی باشند، مجموع جواب های ممکن برای k کدام است؟

$$\frac{7}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{13}{6} \text{ (۳)}$$

$$\frac{11}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{7}{6} \text{ (۱)}$$

$n > m \rightarrow$ طبیع

$$n > m \rightarrow 1 \rightarrow n=1, m=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 - rx + 1}{x + rx + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - rx + 1}{x(1+r) + r} = +\infty$$

$$n=2, m=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - rx + 1}{x + rx + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - rx + 1}{rx^2 + x + r} = \frac{1}{r}$$

$$n=1, m=2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 - rx + 1}{x^2 + rx + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - rx + 1}{x^2 + rx + r} = \frac{1}{x^2} = 0$$

$$n=2, m=2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - rx + 1}{x^2 + rx + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - rx + 1}{rx^2 + x + r} = \frac{1}{r}$$

۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{a + bx + x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - r \right) = 2$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$21 \text{ (۴)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} - r \right) = 2$$

$$\sqrt{ax + b} + \frac{b\sqrt{a}}{ax} - rx = r$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax + b} - rx \right) = 2$$

$$\sqrt{a} = r \rightarrow a = 9$$

$$\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{ax} \right| - rx = 2 \rightarrow \frac{1}{4} \frac{b}{ax} = 2 \rightarrow b = 12$$

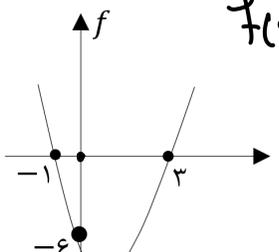
$$a=9$$

$$b=12$$

$$12+9=21$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax + b} \rightarrow \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{ax} \right|$$

۱۸- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر تابعی خطی و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + xg(x)}{1 + g^{-1}(x)} = 6$ باشد، مقدار $g(2)$ کدام است؟



$$f(x) = (x-2)(x+1)a$$

$$f(3) = (-1)(1)a = -a$$

$$a = 2$$

$$g(x) = -2x + 1$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$g(2) = -4 + 1 = -3$$

$$g(x) = ax + b$$

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$



(۱) صفر

(۳) -۲

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x - 4 + ax^2 + bx}{1 + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}} = 6$$

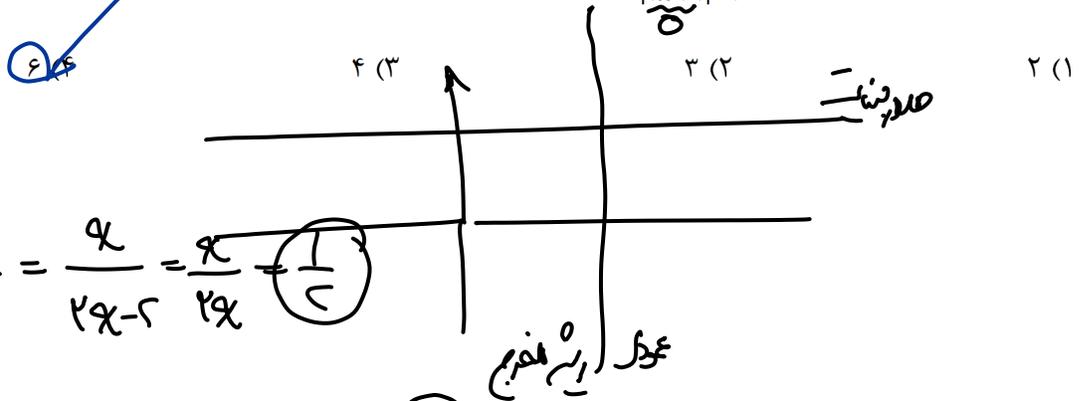
$$a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x - 4 - 2x^2 + bx}{1 + \left(\frac{1}{-2}\right)x - \frac{b}{-2}} = 6$$

$$b - 2 = -4$$

$$\frac{(b-2)x}{-\frac{1}{2}x} = 4 \rightarrow b = 1, a = -2$$

۱۹- از برخورد مجانب های تابع $f(x) = \frac{2x-|x|}{|2x+1|-3}$ یک مستطیل بوجود می آید. مساحت این مستطیل کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x}{2x + 1 - 3} = \frac{x}{2x - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-x)}{-2x - 1 - 3} = \frac{3x}{-2x - 4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$|2x+1| - 3 = 0$$

$$|2x+1| = 3$$

$$2x+1 = 3 \rightarrow x = 1$$

$$2x+1 = -3 \rightarrow x = -2$$

$$2 \times 2 = 4$$

۲۰- اگر $A(2,3)$ نقطه برخورد و مجانب های تابع $f(x) = \frac{2ax-1}{x+b}$ باشد، نقطه برخورد و مجانب های تابع $g(x) = \frac{2bx+1}{x-a}$ کدام است؟

$$\left(\frac{2}{3}, -2\right) (4)$$

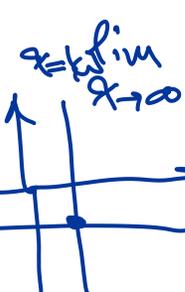
$$\left(\frac{2}{3}, -4\right) (3)$$

$$(3, -4) (2)$$

$$(3, -2) (1)$$

$$\frac{-2x+1}{x-1/3}$$

$$1/3$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$2a = 3$$

$$a = 1/3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax-1}{x+b} \rightarrow \frac{2ax}{x} = 2a$$

$$2+b = 0$$

$$b = -2$$