

۱- نمودار تابع $y = 2 - f(3 - \frac{x}{4})$ را نسبت به مبدا مختصات قرینه کرده، دو واحد به بالا و k واحد به راست انتقال داده ایم و سپس طول نقاط را نصف می کنیم. اگر نمودار نهایی بر نمودار $y = f(\frac{x}{4})$ منطبق باشد، k کدام است؟

$$x - k$$

$$12 \text{ (A)}$$

$$3 \text{ (B)}$$

$$4 \text{ (C)}$$

$$2x$$

$$6 \text{ (D)}$$

$$f(x) \rightarrow -f(-x)$$

$$y = -2 + f(3 - \frac{-x}{4}) + 2$$

$$y = -2 + f(3 + \frac{x-k}{4}) + 2$$

$$y = -2 + f(3 + \frac{x-k}{4}) + 2$$

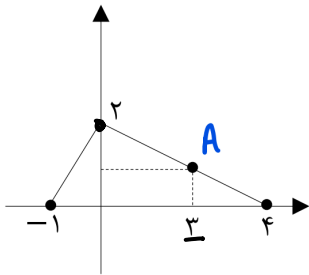
$$f(3 + \frac{x-k}{4}) = f(\frac{x}{4}) \rightarrow$$

$$3 + \frac{x-k}{4} = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{12 + x - k}{4} = \frac{x}{4}$$

$$12 + x - k = x$$

$$k = 12$$

۲- نمودار تابع $y = 2 - 3f(\frac{x}{4})$ به صورت مقابل است. نقطه A واقع بر این نمودار، با نقطه A' واقع بر نمودار $y = f(x)$ متناظر است. مجموع مختصات A' کدام است؟



$$A \rightarrow (2, 1)$$

$$y = f(x) \rightarrow (x, y)$$

$$f(2) \rightarrow (\frac{2}{4}, y)$$

$$f(\frac{2}{4}) \rightarrow (2x, y)$$

$$f(\frac{x-4}{4}) \rightarrow (2x+4, y)$$

$$\frac{x-4}{4} = A \rightarrow x-4 = 4A$$

$$x = 4A + 4 \quad | \quad 10 + 10 = 20$$

$$f(x) = (A', B')$$

$$4 - 3f(\frac{x}{4}) = (4A', -3B' + 2)$$

$$4A' = 4 \rightarrow A' = 10$$

$$-3B' + 2 = 10 \rightarrow -3B' = 8 \rightarrow B' = -\frac{8}{3}$$

$$A' = 10$$

$$\frac{y}{4} = 1$$

$$3 \text{ (C)}$$

$$(0, 2)$$

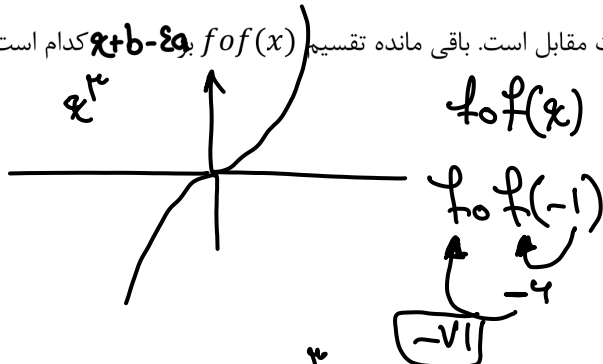
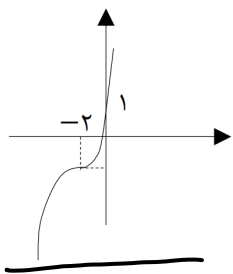
$$(4, 0)$$

$$ax + b \rightarrow b = 2$$

$$4a + 2 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

۳- نمودار تابع $f(x) = (x-a)^2 + b$ به صورت مقابل است. باقی مانده تقسیم $f \circ f(x)$ بر $x^2 + b - \varepsilon$ کدام است؟



-4ε (۲) $-v$ (۱) ✓
 $-5v$ (۳) $-v$ (۳)

$x - v - (x - 1)$

$x - v + 1 = \boxed{x + 1}$
 \downarrow
 $\boxed{-1}$

$(x+1)^2 + k$

$(b+1)^2 + k = 1$

$1 + k = 1 \rightarrow \boxed{k = -1}$

$(x+1)^2 - v = f(x)$
 $x - a = x + 1$

$\boxed{a = -1} \quad \boxed{b = -1}$

۴- چند جمله ای $f(x) = x^3 - 11x^2 + x^2 + ax + 4$ مفروض است. اگر باقی مانده تقسیم $f(x+1)$ بر $(x-1)$ باقی مانده تقسیم $f(x-1)$ بر $(x-2)$ برابر باشد مقدار a کدام است؟

$x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1}$
 $f(1) = 1 - 11 + 1 + a + 4 = -5 + a$

$x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2}$
 $f(2) = 8 - 44 + 4 + 2a + 4 = -32 + 2a$

$f(1) = f(2)$

$\frac{f(1)}{f(2)}$

$4x^2 - 9x + 8 + 10a + 8 = 1 - 11 + 1 + a + 8$

$10a + 10 = a - 11$

$\boxed{a = -10}$

۵- تابع $f(x) = x|x-2| + ax$ در مجموعه اعداد حقیقی اکیدا صعودی است. حدود a کدام است؟

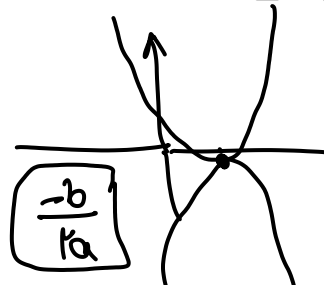
$a \leq 1$ (۴)

$a \geq 2$ (۱) ✓

$a \geq 1$ (۲)

$a \leq 2$ (۱)

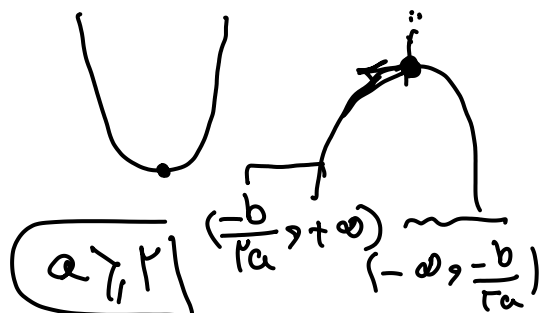
$x > 2 \rightarrow x^2 - 2x + ax \rightarrow \boxed{x^2 + (a-2)x}$
 $x < 2 \rightarrow -x^2 + 2x + ax \rightarrow \boxed{-x^2 + (a+2)x}$



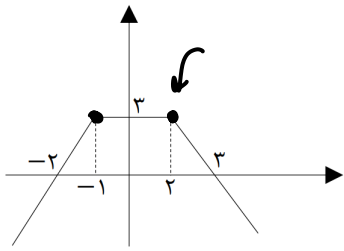
$\frac{-(a-2)}{2} \leq 2 \rightarrow -(a-2) \leq 4$

$\frac{f(a+2)}{+2} \geq 2 \rightarrow a+2 \geq 4$
 $\boxed{a \geq 2}$

$-a+2 \leq 2$
 $\boxed{-2 \leq a}$



۶- نمودار تابع $y = f(x-1)$ به صورت مقابل است. اگر تابع $y = 2f\left(\frac{x-1}{2}\right)$ در بازه $[a, +\infty)$ کیدا یکنوا باشد حداقل a کدام است؟



۳ (۲)
۶ (۳)

$$f(x-1) \begin{cases} [2, +\infty) \\ (-\infty, -1] \end{cases} \rightarrow f(x) \begin{cases} (1, +\infty) \\ (-\infty, -2] \end{cases} \rightarrow 2f\left(\frac{x-1}{2}\right) \begin{cases} (-\infty, 1] \\ [7, +\infty) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2A+3}$$

$$\frac{x-1}{2} = A \rightarrow 2A = x-1$$

$$2A - 1 = -x$$

$$-2A + 1 = x$$

۷- تابع $f(x) = 6 - 2x$ با دامنه $[1, 4]$ مفروض است. مجموعه جواب نامعادله $f \circ f(x) < f(x)$ چند جواب صحیح دارد؟

۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۱)

$$D_{f \circ f(x)} = 1 < x < 4$$

$$1 < 4 - 2x < 4$$

$$-2 < -2x < -2$$

$$2.5 < x < 3$$

$$4 - 2(4 - 2x) < 4 - 2x$$

$$4 - 8 + 4x < 4 - 2x$$

$$4x < 8 \rightarrow x < 2$$

۸- دوره تناوب تابع $f(x) = 2 - a - \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ برابر $\frac{2}{a}$ است. اختلاف ماکزیمم و مینیمم a چقدر است؟

۳ (۴) $\frac{2}{a}$ (۳) $\frac{2}{a}$ (۱)

$$a = \pm \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a} - \left(-\frac{2}{a}\right)$$

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a} = \frac{2}{a}$$

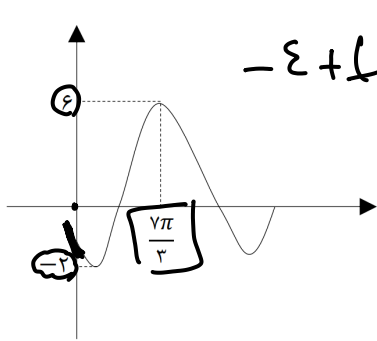
$$\cos(x) \rightarrow \cos\left(\frac{17\pi x}{2}\right)$$

$$2\pi \rightarrow \frac{2}{a} \rightarrow \frac{1}{\pi} \rightarrow \cos(x) \rightarrow \cos(2x) \rightarrow \cos(ax)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\frac{2\pi}{a} x = \frac{17\pi}{2} x \rightarrow a = \pm \frac{2}{a}$$

۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = c + a \sin(bx + \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. حاصل $a + bc$ کدام است؟



$$-2 + \left(\frac{1}{c}\right)(f) = -2 \quad a \cos(bx + \frac{\pi}{4}) \cdot b$$

$$ab < 0$$

۳ (۲)

۵ (۱)

$$\frac{\sqrt{x}}{\pi} \times b = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$b = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{c}}{c} \times b + \frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{\pi}$$

$$\frac{\sqrt{c}}{c} \times b = \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} = 0$$

$$\max = c + |a| = 4$$

$$\min = c - |a| = -2$$

$$2c = 2 \rightarrow c = 1$$

$$|a| = 2$$

$$a = -2$$

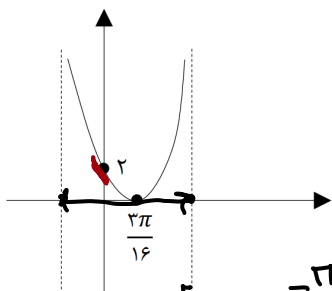
$$b > 0$$

$$f(0) = 2 + \left(a \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\right) < 0 \rightarrow a < 0$$

$$2 - 2 \sin\left(bx \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$\sin\left(bx \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \rightarrow \frac{7\pi}{4}$$

۱۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \tan^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right)$ به صورت مقابل است. حاصل $a - b$ کدام است؟



$$a \tan^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a = 2$$

۴ (۱)
۲ (۳)
صفر (۴)

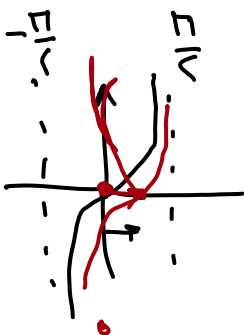
$$2 \tan^2\left(2bx - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \tan^2\left(\frac{7\pi}{16} b - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{16} b - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

(0, 2)

(7π/16, 0)



$$2 - \frac{2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{7\pi}{16} b - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\frac{7\pi}{16} b = \frac{\pi}{4}$$

$$b = \frac{4}{16}$$

۱۱- مجموع جواب های معادله $\sin x + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$\frac{3\pi}{2}$ (۴)

$\frac{5\pi}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ (۲) ✓

$\frac{4\pi}{3}$ (۱)

$\sin x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \cos x$

$\sin x (1 + 2 \cos x) = 1 + 2 \cos x \rightarrow \boxed{\sin x = 1}$

$\begin{cases} 1 + 2 \cos x = 0 \rightarrow 2 \cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\frac{2\pi}{3}} \\ \sin x = 1 \rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \boxed{\frac{7\pi}{6}}$

۱۲- اگر α کوچک ترین جواب مثبت معادله $\frac{6}{\sin x} = \Delta \sin x - \gamma$ باشد، حاصل $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

$\frac{6 \sin^2 x - \gamma}{\sin x} = \gamma \rightarrow 6 \sin^2 x - \gamma = \gamma \sin x$

$\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$

$a x^2 + b x + c = 0$

$6 \sin^2 x - \gamma \sin x - \gamma = 0$

$\frac{\frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \gamma$

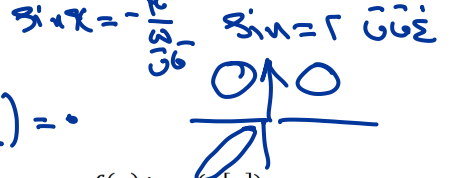
$6 \sin^2 x - \gamma \sin x - \gamma = 0$

$(6 \sin x + \gamma)(\sin x - \gamma) = 0$

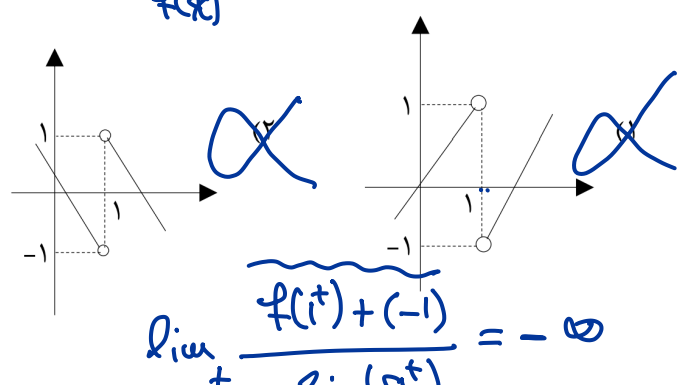
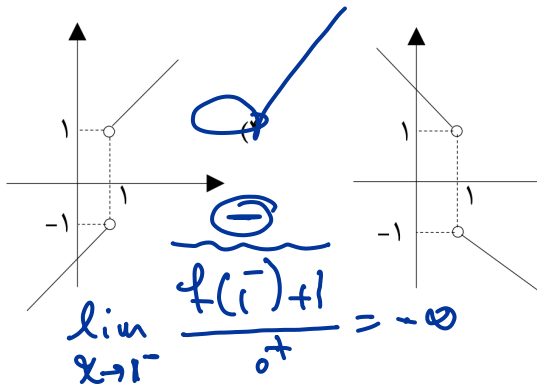
$\sin x = -\frac{\gamma}{6}$  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

$6 \sin^2 x - \gamma \sin x - \gamma = 0$

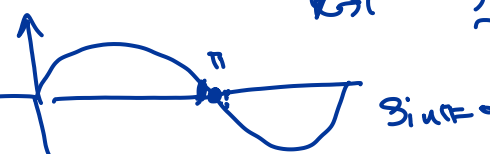
$(\sin x - \gamma)(6 \sin x + \gamma) = 0$



۱۳- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \cos(\pi/x)}{\sin(\pi x)} = -\infty$ باشد، کدام می تواند باشد؟



$f(x^-) + 1 < 0$
 $f(x^-) < -1$



$f(x^+) > 1$
 $f(x^+) - 1 > 0$

$$b = -2$$

$$a = 2$$

$$2 - (-2) = 4$$

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1} = 0$$

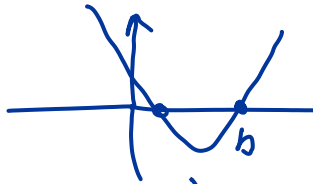
$$a = 1$$

$$4a^2 - 4ca = 0$$

$$4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

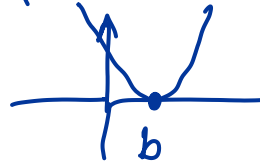
$$a = 1$$

؟ کدام $a - b$ حاصل باشد، $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x+1}{ax^2+6ax+11} = -\infty$ اگر $-1 \neq$



$$b^+ \rightarrow 0^+ + \infty$$

$$b^- \rightarrow 0^- - \infty$$



$$\frac{-a}{b^2 - 4ac} = -\infty$$

$$\frac{1}{(x^2 + 6x + 11)}$$

$$\leftarrow (x^2 + 6x + 11)$$

۱۵- تابع $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$ را با دامنه $[0, 6\pi]$ در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + f(x+b)} = -\infty$ حاصل $\frac{1}{\pi} ab$ کدام است؟

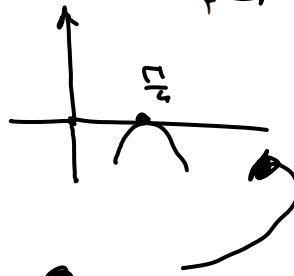
$$f(x) (A, B)$$

$$\sin x$$

$$f\left(\frac{x}{\frac{\pi}{2}}\right) (A, B)$$

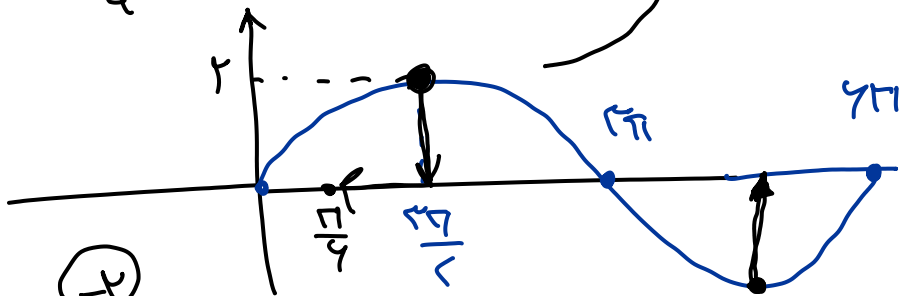
$$\frac{\pi}{2} + \epsilon \rightarrow 0^-$$

$$\frac{\pi}{2} - \epsilon \rightarrow 0^-$$



$$\sin x = 2\pi$$

$$\sin \frac{x}{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$



$$a = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$$

$$-1 \times \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}}$$

$$a + f(x+b) \rightarrow a + 2 \sin \frac{x+b}{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sin x$$

$$\frac{\pi}{2} + b = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2b = 2\pi$$

$$2b = \frac{3\pi}{2} \rightarrow b = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + 1 = \frac{\infty}{4} + \frac{2}{4} = \frac{11}{4}$$

عدد طبیعی باشند، مجموع جواب های ممکن برای k کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r - 2x + 1}{x^m + 2x^n + r} = k$ اگر n, m دو

$$\frac{7}{3} (14)$$

$$\frac{13}{6} (13)$$

$$\frac{11}{4} (11)$$

$$\frac{7}{6} (14)$$

$n, m \rightarrow$ طبیع

$$n, m \rightarrow 1 \rightarrow n=1, m=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 - 2x + 1}{x + 2x + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 - 2x + 1}{(3x) + r} = +\infty$$

$$n=2, m=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2x^2 + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x + r} = \frac{1}{2}$$

$$n=1, m=2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 - 2x + 1}{x^2 + 2x + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^1 - 2x + 1}{x^2 + 2x + r} = \frac{1}{x} = 0$$

$$n=2, m=2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + r} = \frac{1}{1} = 1$$

۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{a + bx + x^2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - r \right) = 2$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$21 (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} - r \right) = 2$$

$$\sqrt{ax + b\sqrt{a}} - rx = r$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + 1} - rx \right) = 2$$

$$\sqrt{a} = r \rightarrow a = 9$$

$$\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| - rx = 2 \quad \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a}} = 2 \rightarrow b = 12$$

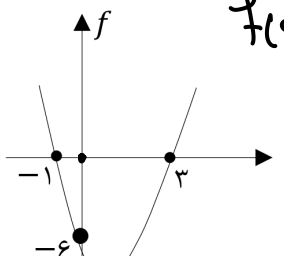
$$a=9$$

$$b=12$$

$$12+9=21$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax^2 + bx + 1} \rightarrow \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

۱۸- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر تابعی خطی و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + xg(x)}{1 + g^{-1}(x)} = 6$ باشد، مقدار $g(2)$ کدام است؟



$$f(x) = (x-2)(x+1)a$$

$$f(0) = (-2)(1)a = -2a$$

$$a = 2$$

$$g(x) = -2x + 1$$

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$g(2) = -2(2) + 1 = -3$$

$$g(x) = ax + b$$

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$



(1) صفر

(2) -2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x - 4 + ax^2 + bx}{1 + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}} = 6$$

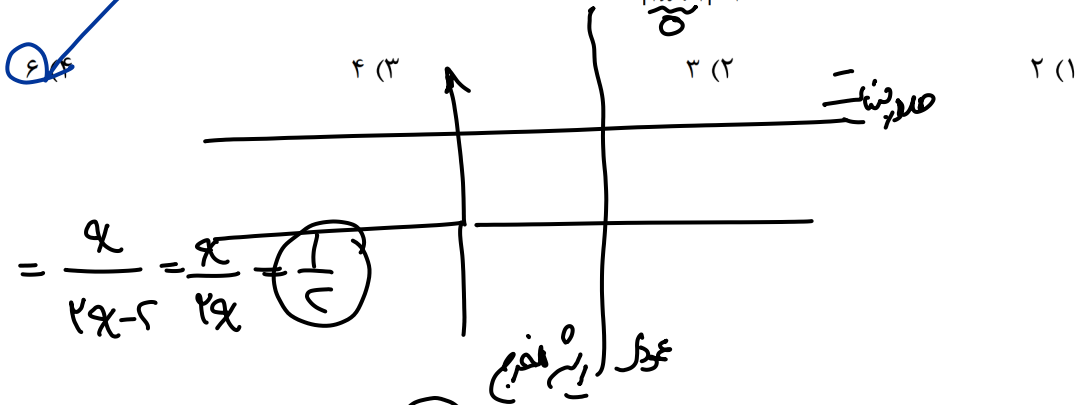
$$a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2x - 4 - 2x^2 + bx}{1 + \left(\frac{1}{-2}\right)x - \frac{b}{-2}} = 6$$

$$b - 2 = -2$$

$$\frac{(b-2)x}{-\frac{1}{2}x} = 6 \rightarrow b = 1, a = -2$$

۱۹- از برخورد مجانب های تابع $f(x) = \frac{2x-|x|}{|2x+1|-3}$ یک مستطیل بوجود می آید. مساحت این مستطیل کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x}{2x + 1 - 3} = \frac{x}{2x - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-x)}{-2x - 1 - 3} = \frac{3x}{-2x - 4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$|2x+1| - 3 = 0$$

$$|2x+1| = 3$$

$$2x+1 = 3 \rightarrow x = 1$$

$$2x+1 = -3 \rightarrow x = -2$$

$$2 \times 2 = 4$$

۲۰- اگر $A(2,3)$ نقطه برخورد و مجانب های تابع $f(x) = \frac{2ax-1}{x+b}$ باشد، نقطه برخورد و مجانب های تابع $g(x) = \frac{2bx+1}{x-a}$ کدام است؟

$$\left(\frac{2}{3}, -2\right) (4)$$

$$\left(\frac{2}{3}, -4\right) (3)$$

$$(3, -4) (2)$$

$$(3, -2) (1)$$

$$\frac{-2x+1}{x-1/2}$$

$$1/2$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$2a = 3$$

$$a = 1/2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax-1}{x+b} \rightarrow \frac{2ax}{x} = 2a$$

$$2+b = 0$$

$$b = -2$$