

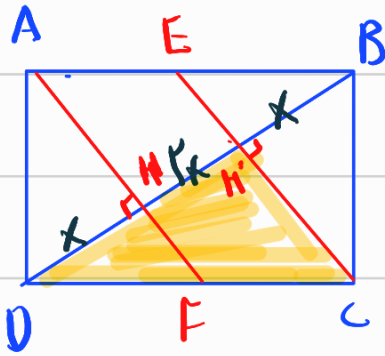
۱- در یک مستطیل، خط‌هایی از دو رأس مقابل بر یک قطر عمود می‌شوند و آن قطر را به سه قسمت طوری تقسیم می‌کنند که قسمت وسط دو برابر هر یک از قسمت‌های کناری است. مساحت این مستطیل چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ایجاد شده در مستطیل است؟

۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۴ (۱)



مثلث DHF یا مثلث EBH'

مساحت مستطیل

۲ برابر مساحت مثلث BDC

مساحت مثلث DHF

مساحت مثلث DHF

$$2 \left(\frac{1}{2} \cdot BD \cdot CH' \right)$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CH'$$

$$\Delta \times 3 = 12$$

$$\frac{1}{2} \times DH \cdot FH$$

$$\frac{1}{2} \cdot FH$$

$$\Delta \frac{CH'}{FH} \quad \text{①}$$

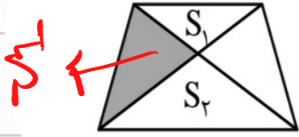
$$\triangle CH'D : \frac{DH}{DH'} = \frac{FH}{CH'}$$

استفاده از فضای نالین در مثلث $CH'D$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{FH}{CH'}$

$$\Rightarrow \frac{CH'}{FH} = 3$$

$$\Delta \times 3 = 12 \quad \text{در جایگزینی}$$

۲- در ذوزنقه مقابل، $\frac{S_2}{S_1} = 9$ است. مساحت مثلث رنگ شده چه کسری از مساحت کل است؟



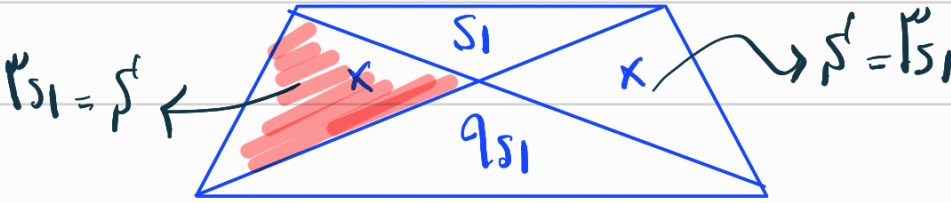
$$S_1 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

$$\frac{3}{16} \quad (2)$$

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{5}{16} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$



$$S_2 = 9S_1$$

$$S_1 = \sqrt{S_1 \cdot 9S_1} = \sqrt{9S_1^2} = 3S_1$$

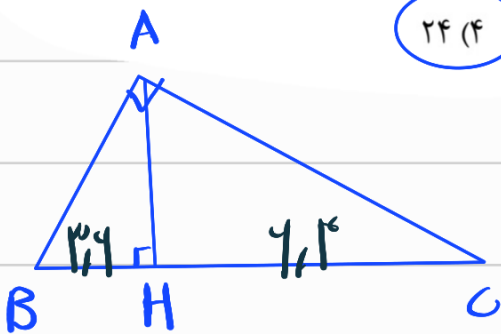
$$\text{مساحت کل} = 9S_1 + S_1 + 3S_1 + 3S_1 = 16S_1$$

$$\text{مساحت مثلث رنگ شده} = 3S_1$$

$$\frac{\text{مساحت مثلث رنگ شده}}{\text{مساحت کل}} = \frac{3S_1}{16S_1} = \frac{3}{16}$$

۳- در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه دو پاره خطی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر ایجاد می کند، $\frac{3}{6}$ و $\frac{6}{4}$ است. محیط

مثلث کدام است؟



$$24 \quad (4)$$

$$28 \quad (3)$$

$$32 \quad (2)$$

$$36 \quad (1)$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AB^2 = \frac{3}{4} \times 10 = \frac{30}{4} \rightarrow AB = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

$$AC^2 = \frac{6}{4} \times 10 = \frac{60}{4} \rightarrow AC = \sqrt{\frac{60}{4}} = \frac{\sqrt{60}}{2} = \sqrt{15}$$

$$\text{محیط} = \frac{\sqrt{30}}{2} + \sqrt{15} + 10 = 12$$

۴- دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + (b-a)x + 4b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ است. مقدار b کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{-2}{3} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

طرحه ریشه‌ها را می‌بینیم.

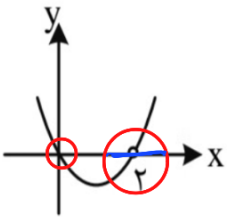
ع: ریشه‌ها $k = a + b = -\frac{b-a}{2} = \frac{a-b}{2}$

$$\Rightarrow 2a + 2b = a - b \Rightarrow \boxed{a = -3b}$$

ن: ریشه‌ها $l = ab = \frac{4b}{2} \Rightarrow ab = 2b \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$$\xrightarrow{a=2} 2 = -3b \Rightarrow \boxed{b = \frac{-2}{3}}$$

۵- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax^2 - ax + c}{x + b}$ به صورت مقابل است. $a + b$ کدام است؟



$$\frac{-6}{-10} \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

$$-10 \quad (4)$$

$$-8 \quad (3)$$

$$f(0) = 0 \rightarrow \frac{0 + 0 - 0 + c}{0 + b} = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$x = 2$ ← نقطه توجالی نیز است ← $x = 2$ ریشه خارج است

$$\rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

$x = 2$ ریشه صورت نیز هست.

$$f(2) = 0 \rightarrow 4 + 4a - 2a + c = 0 \Rightarrow 4 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$a + b = -2 - 2 = -4$$

۶- برد تابع $f(x) = x + \frac{9}{x}$ با دامنه $(0, +\infty)$ برابر با $[a, +\infty)$ است. $f(a)$ کدام است؟

$7/5$ (۴)

۷ (۳)

۶/۵ (۲)

۶ (۱)

نکته: اگر x در صورت مثبت باشد
 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}}$

$$\Rightarrow x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{9} = 6$$

$$\Rightarrow R_f = [6, +\infty) \Rightarrow \boxed{a=6}$$

$$f(a) = f(6) = 6 + \frac{9}{6} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

۷- دامنه توابع $f(x) = \sqrt{5x - x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{b - |x - a|}$ برابر هستند. ab کدام است؟ ($b > 0$)

$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{15}{2}$ (۲)

$\frac{15}{4}$ (۱)

$$D_f : 5x - x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0$$

$$D_f = [1, 4]$$

	1	4
	+	-
	0	0
	-	+

$$b - |x - a| \geq 0 \Rightarrow |x - a| \leq b \rightarrow -b \leq x - a \leq b$$

$$\xrightarrow{+a} a - b \leq x \leq a + b \Rightarrow D_g = [a - b, a + b]$$

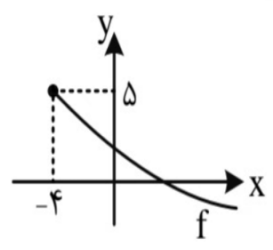
$$a - b = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{d}{r} \\ b = \frac{r}{r} \end{cases}$$

$$a + b = 4$$

$$ab = \frac{d}{r} \times \frac{r}{r} = \frac{1d}{r}$$

۸- نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ به صورت مقابل است. $f^{-1}(3)$ کدام است؟



$D_f = [-b, +\infty)$

$\Rightarrow -b = -4$
 $\Rightarrow b = 4$

(۲) صفر
 ۴ (۴)

(۱) ۱/۲
 ۲ (۳)

$x+b \geq 0 \Rightarrow x \geq -b \Rightarrow D_f = [-b, +\infty)$

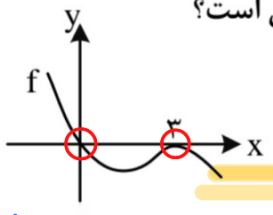
$f(-4) = a \Rightarrow a - \sqrt{-4+4} = a \Rightarrow a = a$

$f(x) = a - \sqrt{x+4}$

$f^{-1}(3) = x \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow a - \sqrt{x+4} = 3$

$\Rightarrow \sqrt{x+4} = a-3$
 $\xrightarrow{\text{ب توان ۲}} x+4 = (a-3)^2 \Rightarrow x = (a-3)^2 - 4$
 $\Rightarrow f^{-1}(3) = 0$

۹- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x^2 - 3x}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟



(۲) ۱
 ۴ بی شمار

(۱) صفر
 (۳) ۲

$x=0$ ریشه‌های تابع f

$x=3$ ریشه‌های ساده تابع f

$x=0$ ریشه‌های ساده

$x=3$ ریشه‌های مضرب

ریشه‌های $f(x)$

$x=0$ ریشه‌های ساده

$x=3$ ریشه‌های ساده

ریشه‌ها

$x^2 - 3x = x(x-3)$

	۰	۳	$+\infty$
f	$+$	$+$	$-$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \Rightarrow \{1, 2\}$ اعداد طبیعی در آنجا

۱۰- مجموع جواب‌های معادله $[x-2] + [3-x] = 2x+5$ کدام است؟

$-4/5$ (۴)

-4 (۳)

$-3/5$ (۲)

-3 (۱)

$$[x] - 2 + 3 + [-x] = 2x + 5 \Rightarrow 2x + 1 = [x] + [-x]$$

$$[x] + [-x] = 0 \quad x \in \mathbb{Z}$$

\Rightarrow

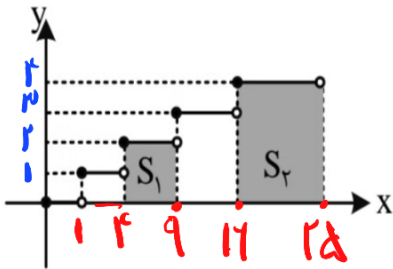
$$[x] + [-x] = -1 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2 \checkmark$$

$$2x + 1 = -1 \Rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1 \checkmark$$

جواب ما $= -1 - \frac{1}{2} = -1.5 = -1.5 = -1.5$

۱۱- نمودار تابع $y = [\sqrt{x}]$ در بازه $[0, 25]$ به صورت مقابل رسم شده است. اگر مساحت مستطیل‌های رنگی S_1 و S_2 باشند، مقدار $S_2 - S_1$ کدام است؟



26 (۲)

24 (۱)

32 (۴)

28 (۳)

رسم نمودار بارش بازه بند

$$0 \leq x < 1 \rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \rightarrow [\sqrt{x}] = 0$$

$$1 \leq x < 4 \rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$

$$S_1 = 1 \times (9 - 4) = 1 \times 5 = 5$$

$$S_2 = 2 \times (25 - 16) = 2 \times 9 = 18$$

$$S_2 - S_1 = 18 - 5 = 13$$

۱۲- کدام یک از توابع داده شده یک به یک است؟

$y = x - |x|$ (۴)

$y = x^2 + x$ (۳)

$y = x[x]$ (۲)

$y = x^2 - x$ (۱)

x در توابع یک به یک با ازان در y فقط یک x وجود دارد

نیزه ۱: $y = x^2 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$y=0$ | $x=0$
 $x=1$
 $x=-1$

یک به یک نیست

نیزه ۲: $y = x[x]$

$y=0$ | $x < 1$

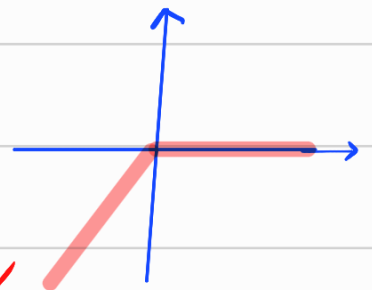
یک به یک نیست

نیزه ۳: $y = x^3 + x = x(x^2 + 1)$

یک به یک است

نیزه ۴: $y = x - |x| =$

$x - x = 0$	$x \geq 0$
$-2x$	$x < 0$



یک به یک نیست

۱۳- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ و $g(x) = |x| - 5x$ باشند، مقدار $g^{-1}(f^{-1}(15))$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۲/۲۵ (۲)

-۱/۵ (۱)

$$f^{-1}(15) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = 15 \rightarrow \alpha + 2\sqrt{\alpha} = 15 \rightarrow \alpha + 2\sqrt{\alpha} - 15 = 0$$

$$(\sqrt{\alpha} + 5)(\sqrt{\alpha} - 3) = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = 3 \rightarrow \boxed{\alpha = 9}$$

$$f^{-1}(15) = 9 \rightarrow g^{-1}(9) = b \rightarrow g(b) = 9$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 5x = -4x & x \geq 0 \\ -x - 5x = -6x & x < 0 \end{cases}$$

$$-6x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{g^{-1}(9) = b = -\frac{3}{2}}$$

۱۴- با فرض $f(x) = \frac{ax+1}{3x-2}$ ، تابع $y = a + f(x)$ و وارون آن بر هم منطبق هستند. a کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

$$y = a + f(x) = a + \frac{ax+1}{3x-2} = \frac{3ax - 2a + ax + 1}{3x-2}$$

$$= \frac{4ax + (1-2a)}{3x-2}$$

تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ زمانی با وارون خود منطبق است.

با $a+d=0$ باشد.

$$\Rightarrow 4a + (-2) = 0 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

۱۵- تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{\lambda x}$ با دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام عرض

$y = -x$

قطع می‌کند؟

$\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$f^{-1}(x) = -x$ ایزوپسین f ↔ تکثیر ↔ $f(f^{-1}(x)) = f(-x)$

$\Rightarrow x = f(-x) \Rightarrow x = -x + \frac{1}{\lambda x} \Rightarrow \lambda x = \frac{1}{\lambda x}$
 $\Rightarrow \lambda^2 x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} & \times \\ x = -\frac{1}{\lambda} & \checkmark \end{cases}$ غوغوغ

نقطه‌ی نیمساز \rightarrow $A(-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$: نقطه‌ی برخورد
 تایید در λ

۱۶- گزینه نمودار تابع $f(x) = 3x + |x|$ نسبت به خط $y = x$ به صورت $g(x) = ax + b|x|$ است. $\Delta a - b$ کدام است؟

$g(x) = f^{-1}(x)$ $y = kx \Rightarrow x = \frac{y}{k} \Rightarrow f^{-1}(k) = \frac{x}{k}$

$f(x) = \begin{cases} kx + x = f(x) & x > 0 \\ kx - x = f(x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{k} & x > 0 \\ \frac{x}{k} & x < 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} ax + bx = (a+b)x & x > 0 \\ ax - bx = (a-b)x & x < 0 \end{cases}$ مقایسه $g(x)$ و $f^{-1}(x)$
 $f^{-1}(x) = g(x)$

$a + b = \frac{1}{k} \Rightarrow ka = \frac{1}{k} \rightarrow a = \frac{1}{k} \quad b = -\frac{1}{k}$
 $a - b = \frac{1}{k} \Rightarrow \Delta a - b = \Delta \frac{1}{k} - (-\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$

۱۷- تابع $f(x) = x^2 - 2x$ با دامنه $(1, +\infty)$ مفروض است. قرینه نمودار این تابع نسبت به محور x ها را ۱۶ واحد به سمت

بالا منتقل می کنیم. فاصله نقطه برخورد تابع جدید و تابع اولیه از مبدأ مختصات کدام است؟

۶√۱۵ (۴)

۴√۵ (۳)

۳√۵ (۲)

۲√۵ (۱)

تابع $g(x)$ تابع $g(x)$

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{باجرر } x \text{ ها}]{\text{مربی نسبت}} -x^2 + 2x \xrightarrow[\text{با } +14]{\text{واحد انتقال}} -x^2 + 2x + 14 = g(x)$$

۱۱ واحد انتقال
۱۴ با

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 14$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 14 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 7 = 0 \rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

نقطه برخورد $= f(4) = (4)^2 - 2(4) = 8$

$x=4$ ✓
 $x=-2$ نمونه

نقطه برخورد $A = (4, 8)$

فاصله از مبدأ مختصات $= \sqrt{(x_A)^2 + (y_A)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

۱۸- اگر $f(x) = \begin{cases} 5-x & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 1 \\ x+1 & x \leq 1 \end{cases}$ باشند، برد تابع $(f+g)(x)$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

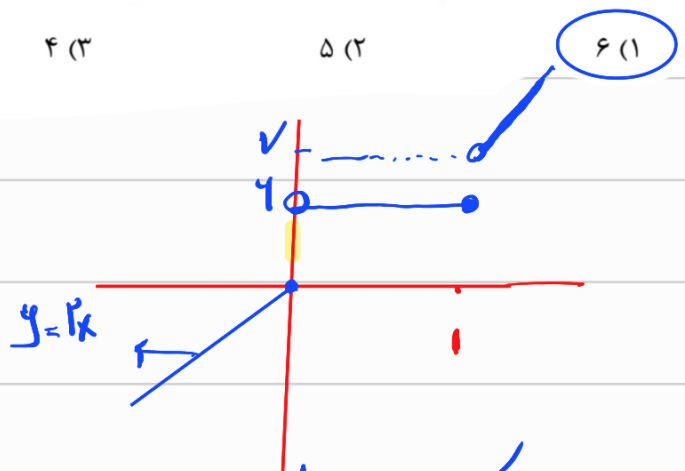
۶ (۱)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$5-x + 2x + 1 = x + 6 \quad x > 1$$

$$5-x + x + 1 = 6 \quad 0 < x \leq 1$$

$$x-1 + x + 1 = 2x \quad x \leq 0$$



اعداد صحیح x تا در برد تابع نیستند

- $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

۱۹- زاویه $\frac{\pi}{5}$ چند رادیان است؟

۲۴ (۴)

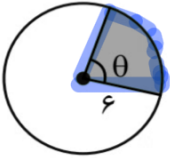
۳۶ (۳)

$\frac{\pi^2}{600}$ (۲)

$\frac{\pi^2}{900}$ (۱)

$$\frac{\pi}{x} = \frac{180}{\frac{\pi}{d}} \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{d} \times \pi}{180} = \frac{\pi^2}{d \times 180} = \frac{\pi^2}{900}$$

۲۰- در شکل مقابل، مساحت و محیط ناحیه رنگی اندازه یکسان دارند. کدام رابطه درست است؟



$\sin 2\theta < \sin \theta < \sin 3\theta$ (۲)

$\sin \theta < \sin 2\theta < \sin 3\theta$ (۴)

$\sin 3\theta < \sin 2\theta < \sin \theta$ (۱)

$\sin 3\theta < \sin \theta < \sin 2\theta$ (۳)

$L = R\theta$

مساحت قطاع = $\frac{1}{2} R^2 \theta$

$L_{\text{مخمس}} = R + R + L = R + R + R\theta = 4 + 4\theta = 12 + 4\theta$

مساحت قطاع = $\frac{1}{2} (4) \times \theta = 18\theta$

محیط رنگی = مساحت رنگی $\Rightarrow 12 + 4\theta = 18\theta \Rightarrow 12\theta = 12 \rightarrow \theta = 1$ رادیان

$\theta = 1$ رادیان = 57°

$\sin 3\theta < \sin \theta < \sin 2\theta$

