

۱- دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + (b-a)x + 4b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ است. مقدار b کدام است؟

$\frac{2}{2}$ (۴)

$\frac{-2}{2}$ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

$$\sum = a + b = \frac{-(b-a)}{2}$$

دوره ریشه‌ها را بیخ میزنیم

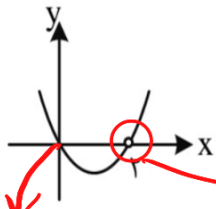
$$\Rightarrow 2a + 2b = a - b \Rightarrow a = -3b$$

$$\Rightarrow 2 = -3b$$

$$\Rightarrow b = \frac{-2}{3}$$

$$P = ab = \frac{2b}{2} \Rightarrow ab = 2b \Rightarrow a = 2$$

۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 - ax + c}{x + b}$ به صورت مقابل است. $a + b$ کدام است؟



-6 (۲)

-4 (۱)

-10 (۴)

-8 (۳)

۹

$x=0 \rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

$$f(2) = \frac{0+0-0+c}{0-2} = 0 \Rightarrow c=0$$

$x=2$ علاوه بر این تا ریشه بیخ خارج است، ریشه بیخ صورت هم هست.

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4a - 2a + c = 0 \Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4$$

$$a + b = -4 - 2 = -6$$

۳- برد تابع $f(x) = x + \frac{9}{x}$ با دامنه $(0, +\infty)$ برابر با $[a, +\infty)$ است. $f(a)$ کدام است؟

۷/۵ (۴)

۷ (۳)

۶/۵ (۲)

۶ (۱)

اگر a و b هر دو اعداد مثبت باشند

$$\Rightarrow x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{9} = 4$$

$$\Rightarrow R_f = [4, +\infty) \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$\Rightarrow F(a) = F(4) = 4 + \frac{9}{4} = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

۴- دامنه توابع $f(x) = \sqrt{5x - x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{b - |x - a|}$ برابر هستند. ab کدام است؟ ($b > 0$)

$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{15}{2}$ (۲)

$\frac{15}{4}$ (۱)

$$5x - x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leq 0$$

$$D_f = [1, 4]$$

	1	4	$+\infty$
F	+	-	+

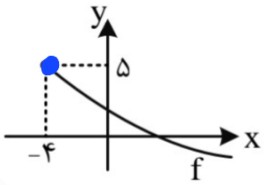
$$b - |x - a| \geq 0 \Rightarrow |x - a| \leq b \Rightarrow -b \leq x - a \leq b$$

$$\xrightarrow{+a} a - b \leq x \leq a + b$$

$$D_f = D_g \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{d}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$ab = \frac{d}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

۵- نمودار تابع $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ به صورت مقابل است. $f^{-1}(3)$ کدام است؟



$$D_f = [-b, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, a]$$

۲ (۲) صفر

۱ (۱) ۱/۲

۳ (۳) ۲

$$x+b \geq 0 \Rightarrow x \geq -b \Rightarrow D_f = [-b, +\infty) \rightarrow -b = -4 \Rightarrow$$

$$b = 4$$

$$x = -4 \rightarrow f(-4) = a \Rightarrow a - \sqrt{-4+4} = a = d \Rightarrow a = d$$

$$\Rightarrow f(x) = d - \sqrt{x+4}$$

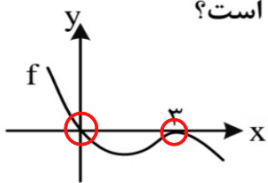
$$f^{-1}(3) = x \Rightarrow f(x) = 3 \rightarrow d - \sqrt{x+4} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4} = d-3 \xrightarrow{\text{بالاتر}} x+4 = (d-3)^2 \Rightarrow x = (d-3)^2 - 4$$

$$x = 0$$

$$f^{-1}(3) = 0$$

۶- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x^2 - 3x}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟



۲ (۲) بی شمار

۱ (۱) صفر

۳ (۳)

ریشه‌های ضابط g $x=0$

ریشه‌های ساده $x=0$

ریشه‌های $f(x)$

ریشه‌های ضابط $x=3$

ریشه‌های ضابط $x=3$

ریشه‌های ساده $x=0$

ریشه‌های ساده $x=3$

$$x^2 - 3x = x(x-3)$$

$g(x)$	+	۰	+	۰	-
		۰		۳	
					$+\infty$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 3)$$

۲ (۲) اعداد طبیعی عضو دامنه: $\{1, 2\}$

۷- مجموع جواب‌های معادله $[x-2] + [3-x] = 2x+5$ کدام است؟

-۴/۵ (۴)

-۴ (۳)

-۳/۵ (۲)

-۳ (۱)

$$[x-2] + [3-x] = 2x+5 \rightarrow [x]-2 + 3 + [-x] = 2x+5$$

$$\Rightarrow [x] + [-x] = 2x+2 \quad | \quad [x] + [-x] = 0 \quad x \in \mathbb{Z}$$

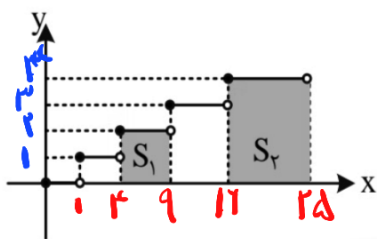
$$x \in \mathbb{Z} : 0 = 2x+2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$[x] + [-x] = -1 \quad x \notin \mathbb{Z}$$

$$x \notin \mathbb{Z} : -1 = 2x+2 \rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} = \underline{\underline{-1.5}}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = -1 - 1.5 = -2.5$$

۸- نمودار تابع $y = [\sqrt{x}]$ در بازه $[0, 25]$ به صورت مقابل رسم شده است. اگر مساحت مستطیل‌های رنگی S_1 و S_2



باشند، مقدار $S_2 - S_1$ کدام است؟

۲۶ (۲)

۲۴ (۱)

۲۲ (۴)

۲۸ (۳)

رسم $y = [\sqrt{x}]$ بارش بازه بندی

$$0 \leq x < 1 \rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \rightarrow [\sqrt{x}] = 0$$

$$1 \leq x < 4 \rightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 1$$

$$4 \leq x < 9 \rightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 2$$

$$9 \leq x < 16 \rightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 3$$

$$16 \leq x < 25 \rightarrow 4 \leq \sqrt{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt{x}] = 4$$

$$S_1 = 1 \times (4-1) = 3$$

$$S_2 = 4 \times (25-16) = 36$$

$$S_2 - S_1 = 36 - 3 = 33$$

۹- کدام یک از توابع داده شده یک به یک است؟

$y = x - |x|$ (۴)

$y = x^3 + x$ (۳)

$y = x[x]$ (۲)

$y = x^3 - x$ (۱)

گزینه ۱: $y = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$y=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

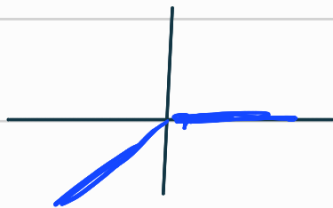
در تناقض با هم شرط یک به یک بودن است.

گزینه ۲: $y = x[x]$

$y=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$
در تناقض با هم شرط یک به یک بودن است.

گزینه ۳: $y = x^3 + x = x(x^2 + 1)$ ✓✓

گزینه ۴: $y = x - |x|$



$y=0 \rightarrow \begin{cases} x-x=0 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$

در تناقض با هم شرط یک به یک بودن

۱۰- اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ و $g(x) = |x| - 5x$ باشند، مقدار $g^{-1}(f^{-1}(15))$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۲/۲۵ (۲)

-۱/۵ (۱)

$$f^{-1}(15) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = 15$$

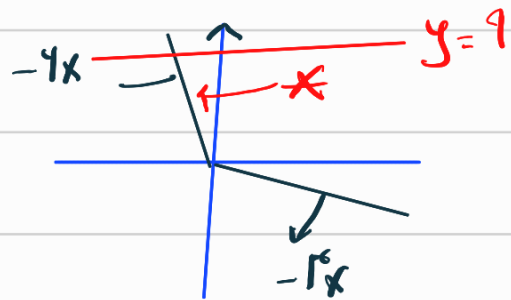
$$\rightarrow \alpha + 2\sqrt{\alpha} = 15 \rightarrow \alpha + 2\sqrt{\alpha} - 15 = 0$$

$$(\sqrt{\alpha} + 5)(\sqrt{\alpha} - 3) = 0 \rightarrow \sqrt{\alpha} = 3 \rightarrow \boxed{\alpha = 9}$$

$$g^{-1}(f^{-1}(15)) = g^{-1}(9)$$

$$g^{-1}(9) = b \rightarrow g(b) = 9$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 5x = -4x & x > 0 \\ -x - 5x = -6x & x < 0 \end{cases}$$



$$-6x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

$$g^{-1}(9) = -\frac{3}{2}$$

۱۱- با فرض $f(x) = \frac{ax+1}{3x-2}$ تابع $y = a + f(x)$ و وارون آن بر هم منطبق هستند. a کدام است؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

$$y = a + f(x) = a + \frac{ax+1}{3x-2} = \frac{3ax - 2a + ax + 1}{3x-2}$$

$$= \frac{4ax + (1-2a)}{3x-2}$$

* شرط این که وارون تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ باز در

تابع برابر شود این است که $a+d=0$ شود.

$$4a + (-2) = 0 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱۲- تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{8x}$ با دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام عرض

طول منتهی عرضی مثبت

قطع می کند؟

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

از طرفین f بگیریم

$$f^{-1}(x) = -x \xrightarrow{\text{از طرفین } f \text{ بگیریم}} f(f^{-1}(x)) = f(-x)$$

$$\Rightarrow x = f(-x) \Rightarrow x = -x - \frac{1}{8(-x)} = -x + \frac{1}{8x}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{1}{8x} \Rightarrow 16x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \text{مختار}$$

$$x = -\frac{1}{4} \quad \checkmark$$

رو نیمساز ناحیه دوم

$$\xrightarrow{\text{از طرفین}} y = -x \quad x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

۱۳- قرینه نمودار تابع $f(x) = 3x + |x|$ نسبت به خط $y = x$ به صورت $g(x) = ax + b|x|$ است. $a - b$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$$F(x) = \begin{cases} 1x + x = 2x & x \geq 0 \\ 1x - x = 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 1x \Rightarrow y = 1x \rightarrow x = \frac{y}{1} \\ \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1}$$

$$1x - x = 0 \quad x < 0$$

$$f(x) = 1x \rightarrow y = 1x \rightarrow x = \frac{y}{1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1}$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1} & x < 0 \end{cases}$$

$g(x)$ وارون $f(x)$ است

$$g(x) = \begin{cases} ax + bx = (a+b)x & x \geq 0 \\ ax - bx = (a-b)x & x < 0 \end{cases}$$

$$ax - bx = (a-b)x \quad x < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Answers} \Rightarrow & \begin{cases} a + b = \frac{1}{1} \\ a - b = \frac{1}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{2}{1} \rightarrow a = \frac{1}{1} \\ b = -\frac{1}{1} \end{cases} \end{aligned}$$

$$a - b = \frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

۱۴- تابع $f(x) = x^2 - 2x$ با دامنه $(1, +\infty)$ مفروض است. قرینه نمودار این تابع نسبت به محور x ها را ۱۶ واحد به سمت

بالا منتقل می کنیم. فاصله نقطه برخورد تابع جدید و تابع اولیه از مبدأ مختصات کدام است؟

$۶\sqrt{5}$ (۴) $۴\sqrt{5}$ (۳) $۳\sqrt{5}$ (۲) $۲\sqrt{5}$ (۱)

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{بمحور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت}} -x^2 + 2x \xrightarrow[\text{+14}]{\text{۱۶ واحد بالا}} -x^2 + 2x + 14 = g(x)$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 14$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 14 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x - 7 = 0 \rightarrow (x-4)/(x+2) = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array} \right. \quad \text{(خبراینا نیست) غرق قه}$$

$$y = (4)^2 - 2 \cdot 4 = 8 \quad \text{نقطه تقاطع} \rightarrow \text{طول تقاطع برخورد برشود}$$

$$\text{نقطه برخورد} \quad A = (4, 8)$$

$$\begin{aligned} \text{فاصله } A \text{ از مبدأ مختصات} \quad OA &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} \\ &= \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

۱۵- اگر $f(x) = \begin{cases} 5-x & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 1 \\ x+1 & x \leq 1 \end{cases}$ باشند، برد تابع $(f+g)(x)$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$5-x + 2x+1 = x+4 \quad x > 1$$

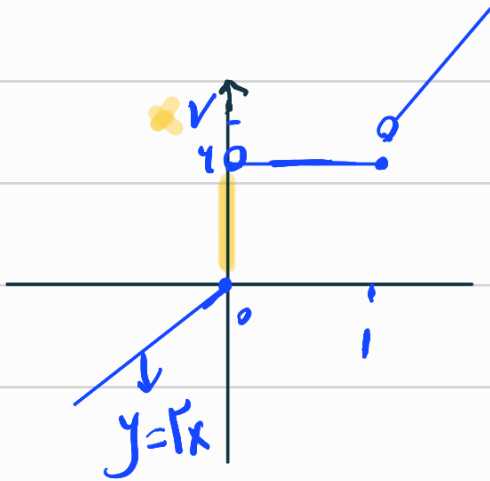
$$5-x + x+1 = 4 \quad 0 < x \leq 1$$

$$x-1 + x+1 = 2x \quad x \leq 0$$

نقطه‌های ما عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷

نیستند

۶ عدد



۱۶- اگر $f(x) = x^5 - 31$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$ باشند، اختلاف ریشه‌های معادله $(f \circ g)(x) = 1$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

$$f(g(x)) = 1$$

$$g(x) = \alpha$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = 1 \rightarrow \alpha^5 - 31 = 1 \rightarrow \alpha^5 = 32 \rightarrow \alpha = 2$$

$$g(x) = \alpha = 2 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 7 = 2 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \text{ غلط} \\ \sqrt{x-1} = 2 \rightarrow x-1 = 4 \rightarrow x = 5 \checkmark \end{array} \right.$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = 5 - (-3) = 8$$

۱۷- اگر $f(x) = 5 - \sqrt{x-2}$ باشد، دامنه fof شامل چند عدد صحیح است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

$$D_f = [2, +\infty) \quad (1) \quad \left| \quad \begin{aligned} & 5 - \sqrt{x-2} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 3 \\ & \xrightarrow{\text{بتران } x} x-2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 11 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

اشتراک (۱) و (۲)

$$2 \leq x \leq 11 \quad D_f = [2, 11]$$

← ۵ عدد صحیح معنی دامنه fof است

۱۸- اگر $f(x) = 2^{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{2}{x+|x|}$ باشند، برد تابع $g \circ f(x)$ کدام است؟

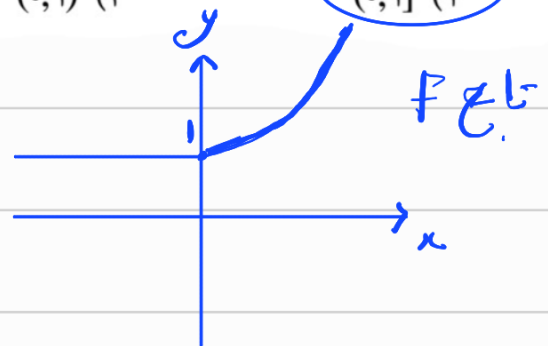
(۴) $(1, +\infty)$

(۳) $(0, +\infty)$

(۲) $(0, 1)$

(۱) $(0, 1]$

$$F(x) = \begin{cases} 2^{x+x} = 2^k = 2^x & x > 0 \\ 2^{x-x} = 2^0 = 1 & x < 0 \end{cases}$$



برد تابع f وارد تابع g می‌شود

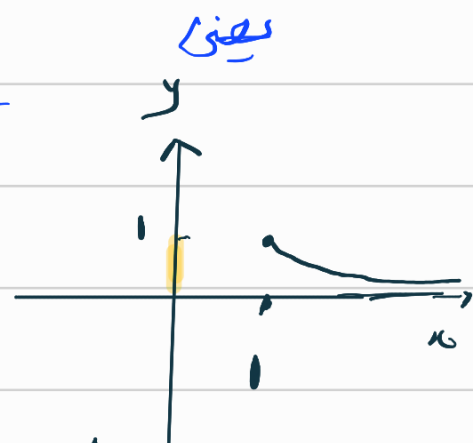
$$x \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow$$

$$D_g = R_f = [1, +\infty)$$

$$D_g = R_f$$

بانتخاب D_g

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2}{x+x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$



$$\Rightarrow R_{g \circ f} = (0, 1]$$

$$g(x) = \frac{1}{x+|x|}; \quad x > 0$$

۱۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x+b}$ و خط $y = 2x$ در نقطه‌ای با عرض ۱ متقاطع هستند. اگر $f^{-1}(1) = 5$ باشد، $a-b$ کدام

است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

نقطه‌ی تقاطع $y = 1$ $\xrightarrow{\text{خط } y=2x \text{ قرار ده}} 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

نقطه‌ی تقاطع $= (\frac{1}{2}, 1)$

$f(\frac{1}{2}) = 1 \rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{2}a+b} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} \frac{1}{2}a+b = 1 = 2^0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a+b = 0 \rightarrow a = -2b$ (۱)

$f^{-1}(1) = 5 \rightarrow f(5) = 1$

$\rightarrow \sqrt[3]{5a+b} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} 5a+b = 1 = 2^0$

$\rightarrow 5a+b = 1$ (۲)

$a = -2b \rightarrow 5(-2b) + b = -9b = 1 \Rightarrow b = -1$

$a = -2b = -2(-1) = 2 \Rightarrow a = 2$

$a - b = 2 - (-1) = 2 + 1 = \underline{3}$

۲۰- اگر تعداد جواب‌های معادله $x^p = \lambda^x$ برابر با α باشد، اختلاف جواب‌های معادله $(2-\sqrt{\alpha})^x + (2+\sqrt{\alpha})^x = 4$ کدام

است؟

۲ (۱)

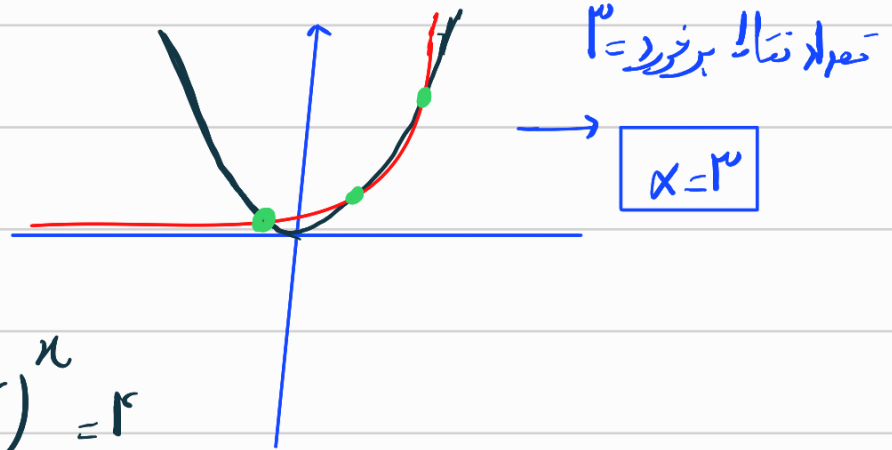
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

$$x^4 = \lambda^x \rightarrow (x^2)^2 = (\lambda^x)^2 = (\lambda^x)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}}$$

$$x^2 = \lambda^x$$



$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$$

$$(2+\sqrt{3})^x = t$$

$$(2-\sqrt{3})^x = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{1} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right)^x = \left(\frac{2-3}{2+\sqrt{3}} \right)^x = \left(\frac{-1}{2+\sqrt{3}} \right)^x$$

$$= (2+\sqrt{3})^{-x} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{t} + t = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t \rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 = 12$$

$$t_1, t_2 = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$t = 2 + \sqrt{3} \rightarrow (2+\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3} \Rightarrow x=1$$

$$t = 2 - \sqrt{3} \rightarrow (2+\sqrt{3})^x = 2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1} \Rightarrow x=-1$$

$$\text{انقلاب پوے دار معادله} = (1) - (-1) = \underline{2}$$