



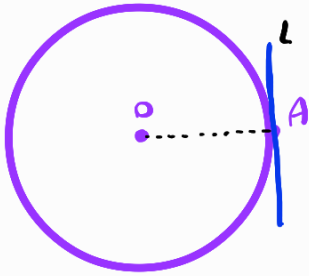
۶۱- خطی در نقطه $A(-2, 3)$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, 4)$ مماس شده است. مساحت سطح محصور بین این خط و محورهای مختصات کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (2) \quad \checkmark$$

۱ (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

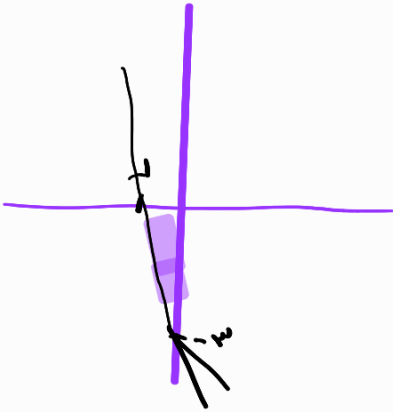


$$m_{OA} = \frac{4-3}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$$

$$m_L = -3$$

$$y = -3x + b \quad \xrightarrow{(-2, 3)} \quad 3 = 6 + b \quad b = -3$$

$$L: y = -3x - 3$$



$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$$

۶۲- نقطه M را به گونه‌ای روی پاره خط AB قرار می‌دهیم که تساوی $\frac{AM}{MB} = 2$ برقرار باشد. اگر مختصات نقاط A و B به ترتیب $(1, 3)$ و $(-1, 15)$ باشد اختلاف طول و

عرض نقطه M کدام است؟

$$AM = 2MB$$

$$\Delta x_{AM} = 2 \Delta x_{BM} \rightarrow x_m - 1 = 2(-1 - x_m) \quad x_m = -2$$

$$\Delta y_{AM} = 2 \Delta y_{BM} \rightarrow y_m - 3 = 2(15 - y_m) \Rightarrow y_m = 11$$

$$|11 + 5| = 16$$

۶ (۱)

۱۶ (۲) ✓

۵ (۳)

۱۵ (۴)

۶۳- فاصله نقطه $A(-1, 2)$ از خط $kx + (k+1)y = 30$ برابر m می باشد، اگر مساحت مثلثی که این خط در ناحیه اول با محورهای مختصات می سازد، برابر ۱۵ باشد، آنگاه



$m\sqrt{61}$ کدام است؟ ($k > 0$)

۲۸ (۲)

۱۲ (۱)

۱۸ (۴)

۲۳ (۳) ✓

$$S = \frac{\frac{p_0}{k} \times \frac{p_1}{k+1}}{2} = 15$$

$$\frac{p_0}{k} + \frac{p_1}{k+1} = 30$$

$$\begin{aligned} k + k - p_0 &= 0 \\ k &= -9 \quad \alpha \\ k &= 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$6x + 4y = 30 \rightarrow 3x + 2y - 15 = 0$$

$A(-1, 2)$

$$m = \frac{|-6 + 12 - 30|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{24}{\sqrt{52}}$$

$$\frac{24}{\sqrt{52}} \times \sqrt{61} = 23$$

۶۴- نقطه A روی خط به معادله $y - x = 5$ واقع است. فاصله نقطه A از نقطه $B(2, 0)$ برابر 5 است. مجموع طول و عرض نقطه A کدام می‌تواند باشد؟

$$A(x, x+5)$$

$$y = x + 5$$

$$-5 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$AB = \sqrt{(x-2)^2 + (x+5-0)^2} = 5$$

$$(x-2)^2 + (x+5)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 + 10x + 25 = 25$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x+1)(x+2) = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -2$$

$$y = 4$$

$$y = 3$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$-1 + 4 = 3$$

$$-2 + 3 = 1$$

۶۵- اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + 1$ باشند و رابطه $\alpha^3 + \alpha^2\beta^3 + \beta^3 = 0$ بین ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ برقرار باشد، حاصل عبارت

$$\frac{b^3 - 1}{ab} \text{ کدام است؟ (} a, b \neq 0 \text{)}$$

$$3 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$y = ax^2 + bx + 1$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{a}$$

$$\alpha^3 + \alpha^2\beta^3 + \beta^3 = 0$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + (\alpha\beta)^3 = 0$$

$$8 - 3\rho\delta + \rho^3 = 0$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a^3} = 0$$

$$\frac{-b^3}{a^3} + \frac{3b}{a^2} + \frac{1}{a^3} = 0$$

$$\frac{-b^3 + 3ab + 1}{a^3} = 0 \quad -b^3 + 3ab + 1 = 0$$

$$b^3 - 1 = 3ab$$

$$\frac{b^3 - 1}{ab} = 3$$

۶۶- شیر آبی متصل به یک استخر ابتدا تا نصفه باز است و پس از ۲ ساعت به صورت کامل باز می‌شود. اگر در مدت زمان ۵ ساعت استخر تا نیمه پر شود، در چه مدت زمانی استخر خالی با شیر

کاملاً باز پر می‌شود؟

۳/۵ (۱)

۶/۵ (۳)

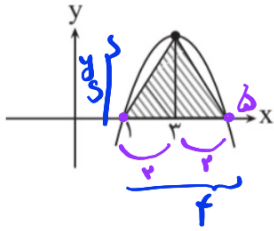
۵/۵ (۲)

۸ (۴)

$$\begin{aligned}
 \text{نیمه پر شدن استخر} &= \frac{1}{2t} \xrightarrow{h2} \frac{2}{2t} = \frac{1}{t} \\
 \text{نیمه پر شدن استخر} &= \frac{1}{t} \xrightarrow{h3} \frac{3}{t} \\
 \frac{1}{t} + \frac{3}{t} &= \frac{4}{t} = \frac{1}{2} \\
 t &= 8
 \end{aligned}$$

$t \leftarrow$ مدت باز
 $2t \leftarrow$ نیمه پر

۶۷- اگر مساحت مثلث رنگی برابر ۱۶ باشد عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها کدام است؟



-۱۰ (۱) ✓

-۶ (۲)

-۴ (۳)

-۱۲ (۴)

$$\underline{x_s = 3}$$

$$S(3, 1)$$

$$S = \frac{4 \times 4}{2} = 16$$

$$\underline{y_s = 1}$$

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a(x - 3)^2 + 1 \xrightarrow{(1, 0)} 0 = a(-2)^2 + 1 \quad a = -2$$

$$y = -2(x - 3)^2 + 1 \xrightarrow{x=0} y = -1.$$

۶۸- به ازای مقدری از m معادله درجه دوم $(m-3)x^2 - 2(m-3)x + 7 = 0$ دارای ریشه مضاعف است. در این صورت معادله $x^2 - (m-2)x + 1 = 0$ چند جواب دارد؟

۳ (۲)

۴ (۱) ✓

۱ (۴)

۲ (۳)

$$\Delta = 0 \longrightarrow \xi(m-3)^2 - \xi(m-3)(7) = 0 \quad f(m-3)(m-3-7) = 0$$

$m-3 \neq 0$
 $\checkmark m \neq 3$

\downarrow
 $m=3$
 \times

\downarrow
 $m=10$
 \checkmark

$$x^2 - 1x + 1 = 0$$

$$x^2 = t \quad t^2 - 1t + 1 = 0$$

$$\Delta = 3 \quad t_1, t_2 = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} = \xi \pm \sqrt{\lambda}$$

$$x^2 = \xi + \sqrt{\lambda} \longrightarrow x = \pm \sqrt{\xi + \sqrt{\lambda}} \quad \checkmark 2$$

$$x^2 = \xi - \sqrt{\lambda} \longrightarrow x = \pm \sqrt{\xi - \sqrt{\lambda}} \quad \checkmark 2$$

۶۹- قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله $\sqrt{x^2 + 5x - 1} + \sqrt{x^2 + 5x + 2} = 3$ کدام است؟

۵ (۲)

۱۰ (۱)

$$\frac{\sqrt{33}}{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt{33} \quad (۳)$$

$$x^2 + 5x = t$$

$$\sqrt{t-1} + \sqrt{t+2} = 3$$

$$\sqrt{t+2} = 3 - \sqrt{t-1}$$

$$t+2 = 9 + t - 1 - 4\sqrt{t-1}$$

$$\sqrt{t-1} = 1 \quad t-1=1 \quad t=2$$

$$x^2 + 5x = 2$$

$$x^2 + 5x - 2 = 0$$

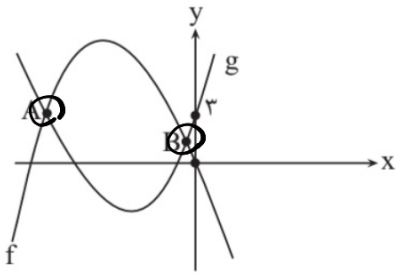
$$\Delta = 25 - 4(1)(-2) = 33$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-5 + \sqrt{33}}{2} - \left(\frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \right) \right|$$

$$\Delta = \sqrt{33}$$

۷۰- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + bx + c$ برابر ۹ و کمترین مقدار تابع $g(x) = x^2 - b'x - c'$ برابر ۱ باشد، آنگاه حاصل ضرب طول‌های نقاط A و B



کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۳) ✓

$\frac{6}{4}$ (۴)

$c = 0 \quad c' = 3$

$f(x) = -x^2 + bx + c \rightarrow \Delta_g = \frac{-\Delta}{\epsilon a} = 9 \quad \frac{-b^2}{-2} = 9$

$g(x) = x^2 - b'x + c'$

$b^2 = 36$

$b = \pm 6$

$b = -6$

$\Delta_g = \frac{-\Delta}{\epsilon a} = -1$

$\Delta_g = \frac{(b')^2 - 4(1)(3)}{-2} = -1$

$2 = (b')^2 - 12 \quad (b')^2 = 14 \quad b' = \pm \sqrt{14} \quad b' = -\sqrt{14}$

$f(x) = -x^2 - 6x$

$g(x) = x^2 + \sqrt{14}x + 3$

$x^2 + \sqrt{14}x + 3 = -x^2 - 6x$

$2x^2 + \sqrt{14}x + 3 = 0$

$P = \frac{3}{2}$

۷۱- نمودار سهمی‌های $y_1 = ax^2 + bx - 1$ و $y_2 = 2x^2 - cx + d$ یکدیگر را در نقاط $(1, 0)$ و $(-2, 3)$ قطع می‌کنند. مجموع عرض رأس‌های دوسهمی، کدام است؟

ج

$$\frac{33}{8} \quad (2)$$

$$\frac{17}{8} \quad (1)$$

$$\frac{-23}{8} \quad (4)$$

$$\frac{-23}{8} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} (1, 0) \rightarrow y_1 &: 0 = a + b - 1 \\ (-2, 3) \rightarrow y_1 &: 3 = 4a - 2b - 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y_1 = x^2 - 1 \quad \begin{array}{l} x_8 = 0 \\ y_8 = -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (1, 0) \rightarrow y_2 &: 0 = 2 - c + d \\ (-2, 3) \rightarrow y_2 &: 3 = 8 - 2c + d \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} c = -1 \\ d = -3 \end{array} \right\} \rightarrow y_2 = 2x^2 + x - 3 \quad \begin{array}{l} x_8 = \frac{-1}{2} \\ y_8 = \frac{-25}{8} \end{array}$$

$$-1 - \frac{25}{8} = \frac{-33}{8}$$

۷۲- حاصل ضرب ریشه‌های غیر صفر معادله $\frac{x^2+3x+1}{x^2+3x-1} + \frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-2} + 2 = 0$ کدام است؟ (x ≠ 0)

$$\frac{9}{2} \quad (2)$$

$$\frac{9}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x^2 + cx = t$$

$$\frac{t+1}{t-1} + \frac{t+2}{t-2} + 2 = 0$$

$$x(t-1)(t-2) \rightarrow (t+1)(t-2) + (t+2)(t-1) + 2(t-1)(t-2) = 0$$

$$4t^2 - 9t = 0$$

$$t = 0$$

$$t = \frac{9}{4}$$

$$t = 0 \quad x^2 + cx = 0 \quad x \neq 0 \quad x = -c \rightarrow P = -c$$

$$t = \frac{9}{4} \quad x^2 + cx = \frac{9}{4} \quad P_1^2 + 4x = 9 \quad P = \frac{-c}{2}$$

$$P_2^2 + 4x - 9 = 0$$

$$-c \times \left(\frac{-c}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

۲۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $۲x^2 - ۳x - ۷ = ۰$ باشند حاصل $\frac{۴\alpha^2 - ۶\alpha - ۱۳}{\beta} + \frac{۴\beta^2 - ۶\beta - ۱۳}{\alpha}$ کدام است؟

$$۲\alpha^2 - ۳\alpha = ۷ \xrightarrow{\times ۲} ۴\alpha^2 - ۶\alpha = ۱۴$$

$$۲\beta^2 - ۳\beta = ۷ \xrightarrow{\times ۲} ۴\beta^2 - ۶\beta = ۱۴$$


$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-7}{2}} = \frac{-3}{7}$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{-7}{2} \quad (2)$$

$$\frac{-3}{7} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$\frac{2}{7} \quad (4)$$

۷۴- اگر معادله $\sqrt{x^2 + \alpha + 2\sqrt{x-3}} = 0$ فقط یک جواب داشته باشد، آنگاه معادله $\sqrt{x^2 + \alpha x + 1} = x - 2$ چند جواب دارد؟ 

(۱) یک جواب دارد.

(۲) دو جواب هم‌علامت دارد.

(۳) دو جواب مختلف‌العلامت دارد.

(۴) جواب ندارد. ✓

$$\sqrt{x^2 + \alpha} = 0 \quad x^2 + \alpha = 0 \quad 9 + \alpha = 0 \quad \alpha = -9$$

$$\sqrt{x-3} = 0 \quad x-3 = 0 \quad x=3$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 1} = x - 2 \longrightarrow x - 2 \geq 0 \quad x \geq 2$$

$$\cancel{x^2} - 4x + 1 = \cancel{x^2} - 8x + 4$$

$$\Delta x = -3 \quad x = \frac{-3}{\Delta} \quad \times$$

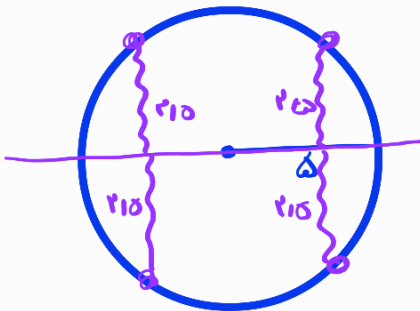
۷۵- اگر خط l از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ واحد بگذرد، چند نقطه روی دایره وجود دارد که از خط l به فاصله $\frac{2}{5}$ واحد باشد؟

۴ (۲) ✓

۲ (۱)

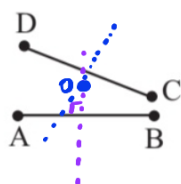
۱ (۴)

۳ (۳)



۷۶- دو پاره‌خط غیر موازی AB و CD مطابق شکل مفروض‌اند. نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد، روی کدام خط قرار

ندارد؟



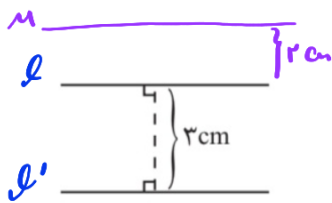
(۱) عمود منصف پاره‌خط AB

(۲) عمود منصف پاره‌خط CD

(۳) خطی که هر دو عمود منصف‌های AB و CD را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند.

(۴) خطی که از نقطه تلاقی عمود منصف‌های AB و CD می‌گذرد.

۲۷- دو خط موازی l و l' در صفحه به فاصله ۳ از هم قرار دارند، نقاطی از صفحه که فاصله آنها از خط l برابر ۲ و از خط l' برابر ۵ باشد، چه شکلی تشکیل می‌دهند؟



(۱) خطی موازی l و l' و به فاصله ۲cm از l و بالای خط l

(۲) خطی موازی l و l' و به فاصله ۲cm از l و پایین خط l

(۳) خطی موازی l و l' و به فاصله ۲cm از l' و بالای خط l'

(۴) خطی موازی l و l' و به فاصله ۵cm از l' و در پایین خط l'

۷۸- حداکثر چند نقطه روی دایره‌ای دلخواه می‌توان یافت که از دو خط غیرموازی d و d' به یک فاصله باشد؟

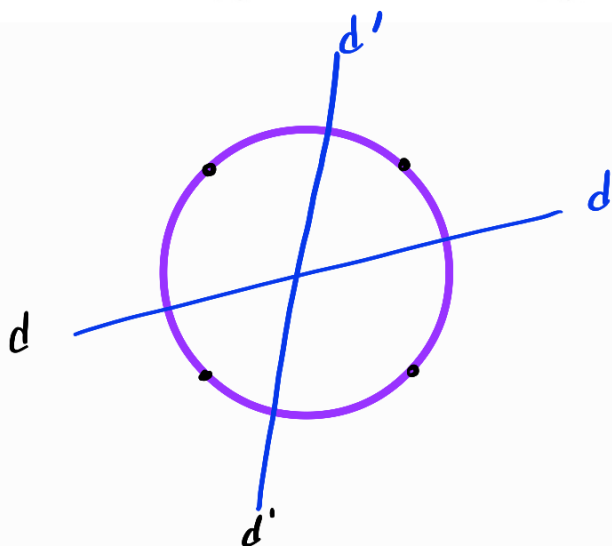


۴ (۴) ✓

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



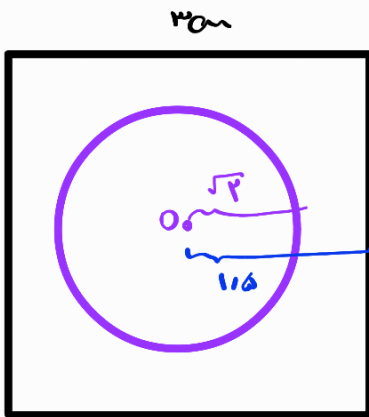
۷۹- در یک مربع به ضلع ۳ چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله آنها از مرکز مربع $\sqrt{2}$ باشد؟

هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. ✓ (۴)

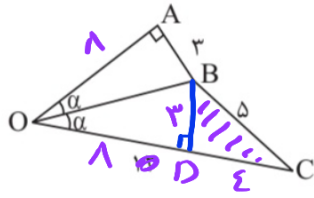
۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)



۸۰- در شکل زیر طول پاره خط OA کدام است؟



۶ (۱)

۸ (۲) ✓

۳ (۳)

۱۰ (۴)

$$AB = BD = 3$$

$$CD^2 = BC^2 - BD^2$$

$$CD^2 = 8^2 - 9 = 19$$

$$CD = \sqrt{19}$$

$$OD = 12 - \sqrt{19} = 18$$

$$\underline{OA = 8}$$