۱- نمودار تابع $f(x)=x(x^{۲}+۳)+۳(x+۱)|x-۱|$ به کدام صورت است؟


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

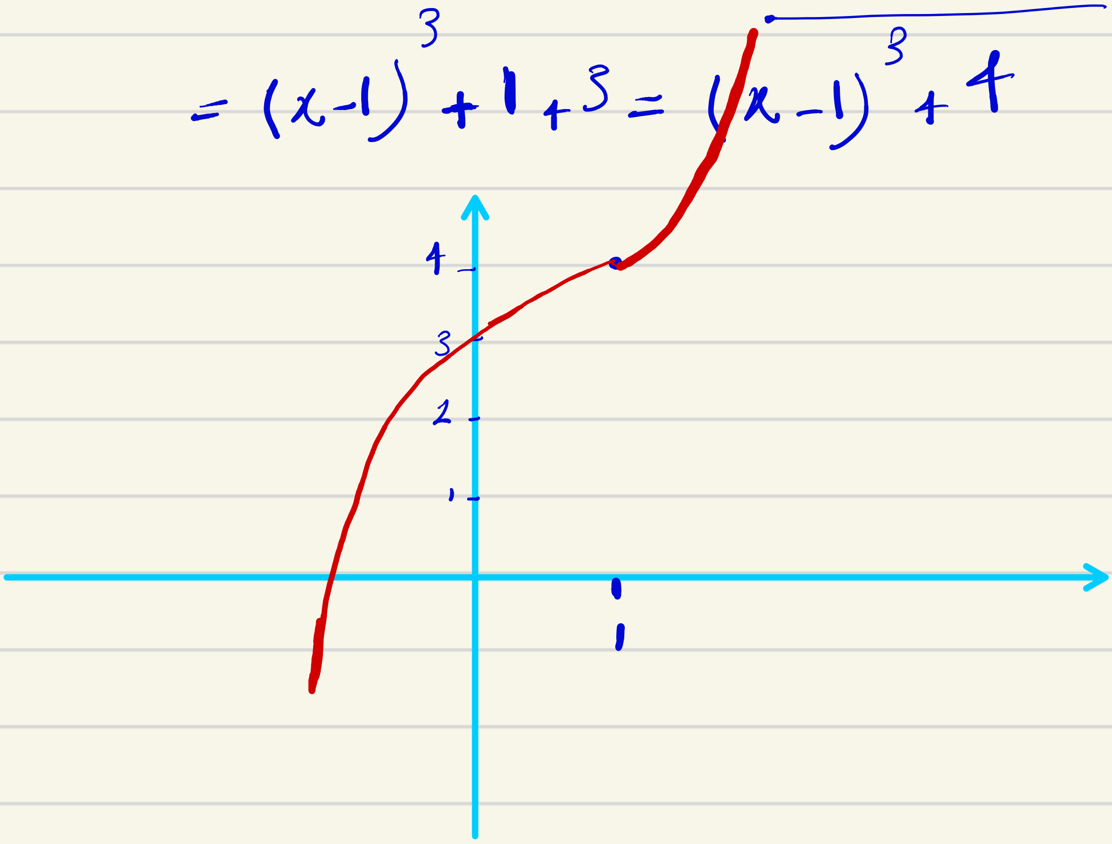
① $x \geqslant 1 \Rightarrow F(x) = x^3 + 3x + 3(x+1)(x-1)$

$= x^3 + 3x + 3x^2 - 3 = (x+1)^3 - 1 - 3 = (x+1)^3 - 4$

② $x < 1 \Rightarrow F(x) = x^3 + 3x - 3(x+1)(x-1)$

$= x^3 + 3x - 3x^2 + 3 = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$

$= (x-1)^3 + 1 + 3 = (x-1)^3 + 4$



۲- توابع $f(x)=|x-1|-|x-3|$ و $g(x)=\dfrac{x^3}{m^3}+2$ مفروض‌اند. حدود m برای این‌که نمودار توابع f و g^{-1} تنها یک نقطه برخورد داشته باشند، به صورت $(-\infty , a)\cup(b , +\infty)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

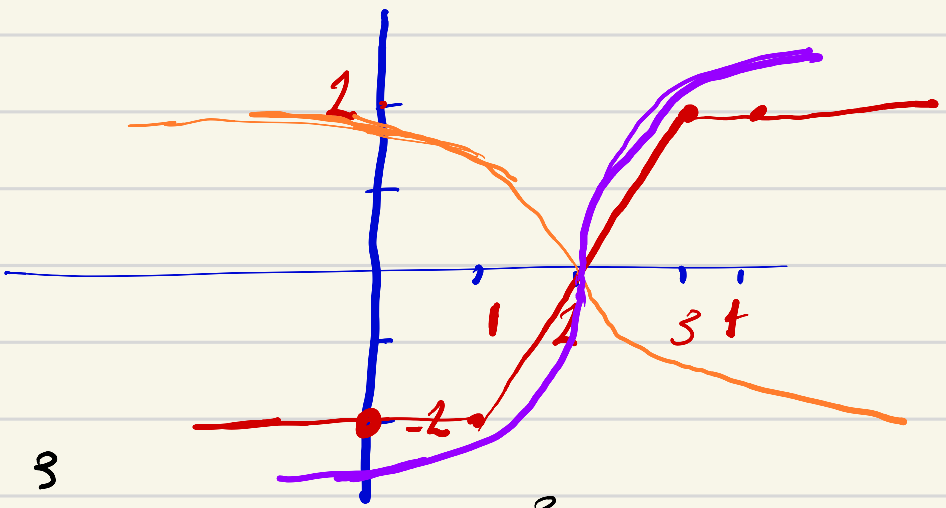
$a=0$
$b=2$

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

نکته: برای رسم توابع داخل قدرمطلق $f(x)$، ریشه‌های درون قدرمطلق را پیدا کرده و سپس در نقطه‌های دلخواه قبل و بعد در ریشه‌ها انتخاب کرده و حاصل را حساب کنید. حال نقطه‌ها را رسم و وصل کنید.

$x=1$
$x=3$

x	0	1	3	4
y	-2	-2	2	2



$$g(x)=\frac{x^3}{m^3}+2 \Rightarrow y=\frac{x^3}{m^3}+2 \Rightarrow y-2=\frac{x^3}{m^3}$$

$$\Rightarrow x^3=m^3(y-2) \to x=m\sqrt[3]{y-2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=m\sqrt[3]{x-2}$$

$$\boxed{(-\infty,0)\cup(2,+\infty)}$$

$m<0 \to x=2 \to g^{-1}=0$

$m>0 \to \begin{cases} x=3 \Rightarrow g^{-1}(3)>2 \Rightarrow m\sqrt[3]{3-2}>2 \Rightarrow m>2 \\ x=1 \to g^{-1}(1)<-2 \Rightarrow m\sqrt[3]{1-2}=-m<-2 \Rightarrow m>2 \end{cases}$

۳- نمودار تابع $y=-4x^2+4x$، ابتدا ۱ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. سپس نسبت به محور x ها قرینه کرده و با ضریب $\frac{1}{2}$ در جهت محور افقی منبسط می‌کنیم. نمودار به دست آمده را ۱ واحد به سمت چپ منتقل کرده و آن را $g(x)$ می‌نامیم. در مورد یکنوایی $y=\log(g(x))$ روی دامنه‌اش کدام گزینه صحیح است؟

۱) اکیداً صعودی

۲) اکیداً نزولی

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی

۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

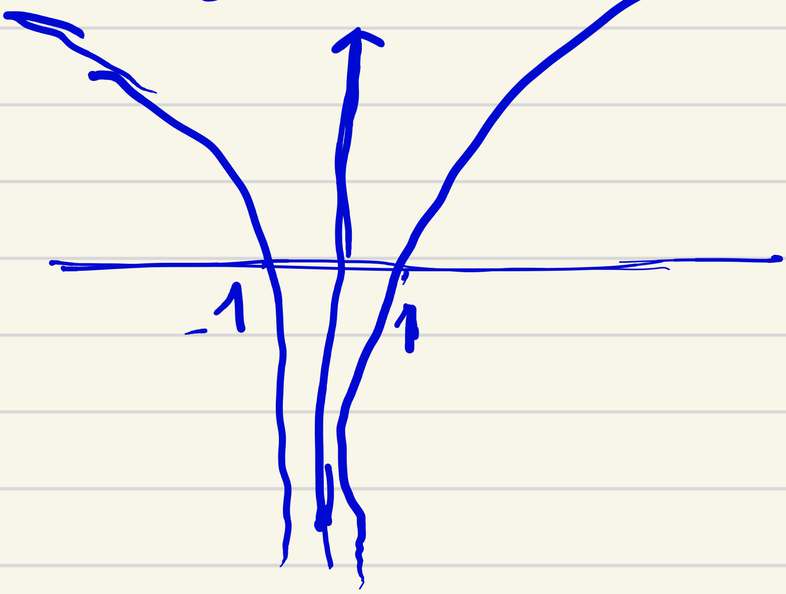
$$y=-4x^2+4x \xrightarrow{\text{۱ واحد پایین}} y=-4x^2+4x-1=-(2x-1)^2$$

$$\xrightarrow[\text{با محور x ها}]{\text{نسبت}} y=(2x-1)^2 \xrightarrow{x\to \frac{x}{2}} y=(x-1)^2$$

$$\xrightarrow{x\to x+1} \boxed{y=x^2}$$

$$g(x)=x^2$$

$$y=\log x^2 \to$$



۴- تابع اکیداً نزولی f با دامنهٔ $[1, +\infty)$ مفروض است. اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(3x-1)-f(4-x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{4}$

۲) $\frac{7}{4}$

۳) $\frac{7}{12}$

۴) $\frac{23}{12}$

$F(\quad)$

1

$3x-1 \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{2}{3}$ 1

$4-x \geq 1 \rightarrow x \leq 5$ 2

2 $f(3x-1) \geq f(4-x)$ 3

$3x-1 \leq 4-x \Rightarrow 4x \leq 5 \Rightarrow \boxed{x \leq \frac{5}{4}}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{4}$

$b = \frac{5}{4}$

$a = \frac{2}{3}$

$\rightarrow b-a = \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$

$= \frac{15-8}{12} = \frac{7}{12}$

Created with Notewise

۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^{12} - 4x^5 + 3$ بر $(x-1)^2$ کدام است؟

۱) $-8x+8$ ۲) -8

۳) $8x-8$ ۴) 8

$$P(x) = b(x)Q(x) + R(x) \quad (*) \qquad \boxed{R(x) = ax+b}$$

$$x^{12} - 4x^5 + 3 = (x-1)^2 Q(x) + (ax+b)$$

$$x=1 \longrightarrow 1-4+3 = (1-1)^2 Q(1) + a+b \qquad \boxed{a+b=0} \ (**)$$

$$0 = a+b$$

از طرفین مشتق

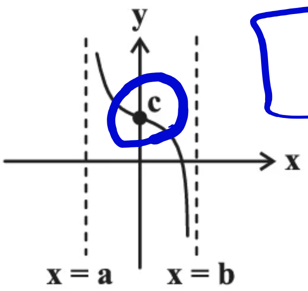
$$\longrightarrow 12x^{11} - 20x^4 = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$$

$$x=1 \longrightarrow 12-20 = 0+0+a \Longrightarrow \boxed{a=-8}$$

$$R(x) = ax+b = -8x+8 \qquad \boxed{b=8}$$

Created with Notewise

۶- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=-\tan(4x)+2$ را نشان می‌دهد. حاصل $\frac{b-a}{c}$ کدام است؟



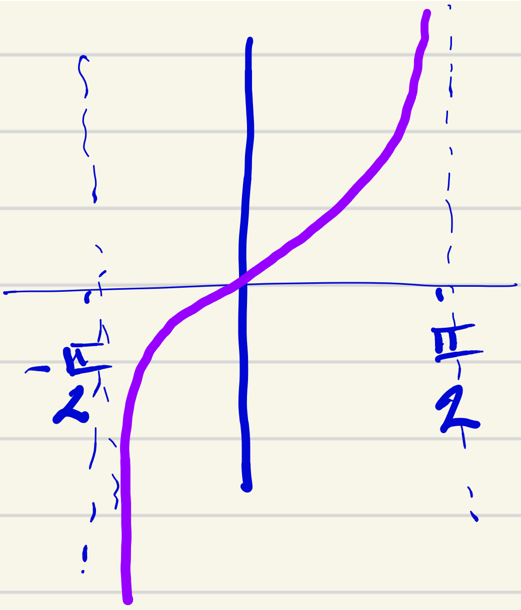
$\boxed{c=2}$

۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{\pi}{8}$

۳) $\frac{3\pi}{4}$

۴) $\frac{3\pi}{8}$



$y=-\tan(4x)+2$

$x=0 \rightarrow y=-\tan(0)+2$
$=2$

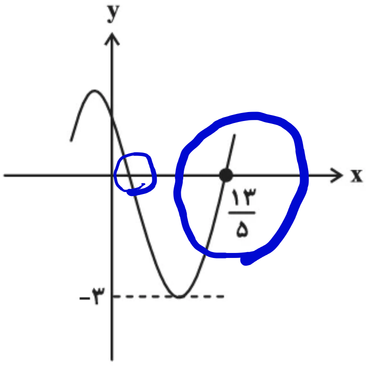
$4a=\frac{-\pi}{2} \rightarrow a=\frac{-\pi}{8}$

$4b=\frac{\pi}{2} \rightarrow b=\frac{\pi}{8}$

$\rightarrow \frac{b-a}{c}=\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}}{2}=\frac{\pi}{8}$

Created with Notewise

۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+\frac{\pi}{5})$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{6}$

۲) $\frac{3\pi}{4}$

۳) $\frac{3\pi}{2}$

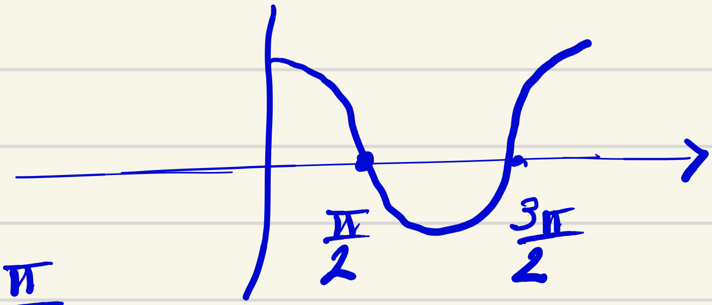
۴) $\frac{2\pi}{3}$

$-1 \le \cos(\;) \le 1$

$x=0 \to a\cos(\frac{\pi}{5})$ +

$|a|=3 \to \begin{cases} a=+3 \ ✓ \\ a=-3 \ \text{غلط} \end{cases}$

$bx+\frac{\pi}{5}=$



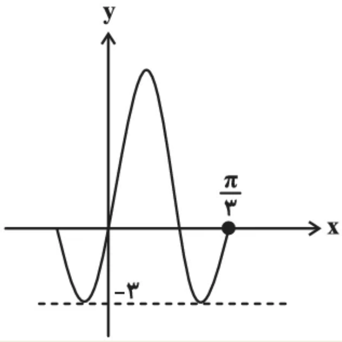
$x=\frac{13}{5} \to \frac{13}{5}b+\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{2}$

$\to \frac{13b}{5}=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{15\pi-2\pi}{10}=\frac{13\pi}{10}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{13}b}{5}=\frac{\cancel{13}\pi}{10} \to b=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$

$ab=3\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

۸- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin(bx - \frac{\pi}{۶}) + ۳$ است. مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟ $(b > ۰)$



۱) ۳

۲) ۶

۳) $۳\sqrt{۳} + ۳$

۴) $۳\sqrt{۲} + ۳$

$$T = \frac{\pi}{3} \qquad \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{b>0} \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

$$x = 0 \longrightarrow f(x) = 0 \longrightarrow a\sin(0 - \frac{\pi}{6}) + 3 = 0$$

$$a\sin(\frac{-\pi}{6}) + 3 = 0 \longrightarrow \frac{-a}{2} + 3 = 0 \longrightarrow \boxed{a = 6}$$

$$f(x) = 6\sin(6x - \frac{\pi}{6}) + 3$$

$$x = \frac{\pi}{12} \qquad f(\frac{\pi}{12}) = 6\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 3$$

$$= 6\sin(\frac{\pi}{3}) + 3 =$$

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 3\sqrt{3} + 3$$

Created with Notewise

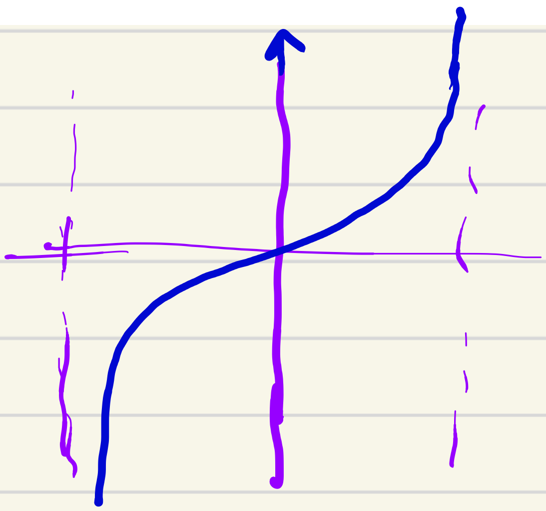
۹- اگر $1 < \tan(\alpha + \frac{\pi}{12}) < \sqrt{3}$، مجموعه مقادیر ممکن $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$

۲) $(0, 1)$

۳) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

۴) $(1, \sqrt{3})$



$x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{2}$

$\tan(x) = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$\tan(x) = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{6}) < \tan(\alpha) < \tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} < \tan\alpha < 1$

۱۰- فرض کنید α و β زاویه‌هایی حاده باشند. اگر $\tan\alpha - \tan\beta = 1$ و $\tan(\alpha+\beta) = -8$، مقدار $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) ۳ ۴) $\frac{7}{3}$

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{3}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = -8$$

$\tan\alpha = x$

$\tan\beta = y$

$x - y = 1 \Rightarrow \boxed{x = y+1}$

$$\frac{x+y}{1-xy} = -8 \quad *$$

$$\frac{2y+1}{1-(y+1)y} = -8 \Rightarrow -8 + 8y(y+1) = 2y+1$$

$$\Rightarrow 8y^2 + 8y - 8 = 2y+1$$

$$\Rightarrow 8y^2 + 6y - 9 = 0 \qquad y^2 + 6y - 72 = 0$$

$$(y+12)(y-6) = 0$$

$$y = \frac{-12}{8} \qquad y = \frac{6}{8}$$

$\tan\beta = -\frac{3}{2}$ غلط

$\tan\beta = \frac{3}{4}$ ✓

$$\tan\alpha = \tan\beta + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

Created with Notewise

۱۱- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{\cos x}}=0$ در بازهٔ $(0\,,\,4\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{5\pi}{2}$

۳) 7π

۴) $\frac{5\pi}{4}$

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x \quad (1)$$

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{\sin x}}-\sqrt{\frac{2\cos^2 x}{\cos x}}=\sqrt{2\sin x}-\sqrt{2\cos x}=0$$

ناحیه اول و دوم

ناحیه اول

یا چهارم

x حتما باید تو ناحیه اول باشد

$$\sqrt{2\sin x}=\sqrt{2\cos x}\ \xRightarrow{\text{توان}}\ \cancel{2}\sin x=\cancel{2}\cos x \longrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$$

$$x=\frac{\pi}{4}\,,\ 2\pi+\frac{\pi}{4} \longrightarrow 2\pi+\frac{\pi}{2}=2.5\pi$$

۱۲- معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{12}-x)+\sin x=\sin\frac{\pi}{12}$ در محدودهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) صفر　　　۲) ۱

۳) ۲　　　۴) ۳

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x - \cos\frac{\pi}{12}\sin x + \sin x = \sin\frac{\pi}{12}$$

$$\sin x\left(1-\cos\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12}\left(1-\cos x\right)$$

$\sin\frac{x}{2}$

$$\cancel{2\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12}\times 2\cancel{\sin^2}\frac{x}{2}$$

$$\sin\frac{x}{2}=0 \longrightarrow \frac{x}{2}=k\pi \longrightarrow x=2k\pi \longrightarrow \boxed{x=0, 2\pi}$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

$$\cot\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{1-\cos\frac{\pi}{12}} = \cot\frac{\pi}{24}$$

$$\cot\frac{x}{2}=\cot\frac{\pi}{24} \longrightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{24} \longrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{12}$$

$$x=\frac{\pi}{12}$$

۱۳- اگر $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{16})} \dfrac{1}{\cot(2x+\frac{\pi}{8})(\sin 4x+\cos 4x)} = \dfrac{k}{\sqrt{2}}$ باشد، مقدار $[k]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۱-

۴) ۲

$$\cot\left(\frac{-\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=\cot(0)=\infty$$

$$\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\frac{1}{\infty \times 0}$$

$$\sin 4x+\cos 4x=\sqrt{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)\sqrt{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cancel{\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)}}{\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right).2\cancel{\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)}\cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)}=f(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{16}} f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^2(0)}=\frac{1}{2\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{k}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$k=\frac{1}{2}\longrightarrow [k]=0$$

۱۴- حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi\cos 2x)}{\sin(2\pi\cos x)}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۲

۴) ۲-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi \times 1)}{\sin(2\pi \times 1)} \quad \frac{0}{0} \quad \underset{\text{Hop}}{=}$$

$$\sin(\pi\cos 2x)' = -2\pi \sin 2x \cos(\pi\cos 2x)$$

$$\sin(2\pi\cos x)' = -2\pi \sin x \cdot \cos(2\pi\cos x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{-2\pi}\ \cancel{\sin 2x}^{\,2\sin x\cos x} \cos(\pi\cos 2x)}{\cancel{-2\pi}\ \cancel{\sin x}\cos(2\pi\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x\cos(\pi\cos 2x)}{\cos(2\pi\cos x)}$$

$$= \frac{2\times 1\cos(\pi)}{\cos(2\pi)} = \frac{2\times 1\times -1}{1} = \underline{-2}$$

Created with Notewise

۱۵- به ازای چند مقدار حقیقی a، تابع $f(x)=\begin{cases}|x| & ; \quad |x|\le ۳\\ \dfrac{a}{x} & ; \quad |x|>۳\end{cases}$ تنها در یک نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱) ۲   ۲) ۱

۳) صفر   ۴) بی‌شمار

$a = +9$ و -9

$x = 3$ و $x = -3$

$$x=3 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{a}{x} = \dfrac{a}{3} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} |x| = 3 \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{a}{3} = 3 \to a = 9$$

$$x=-3 \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^+} |x| = 3 \\ \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{a}{x} = \dfrac{a}{-3} = \dfrac{-a}{3} \end{cases} \Longrightarrow -\dfrac{a}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{a=-9}$$

۱۶- تابع $f(x)=(x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2})[x^2]$ روی بازهٔ $[-\frac{1}{2}, k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k کدام است؟

$k=\sqrt{3}$

([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

نکته: برای پیدا کردن نقاط ناپیوسته در توابع شامل جزء صحیح

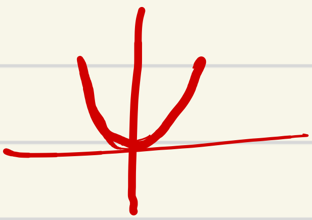
مرحله اول: ابتدا درون جزء صحیح را برابر K قرار میدهیم که K عدد صحیح است.

مرحله دوم: حواسمون هست که تابع در ریشه‌های پشت جزء صحیح پیوسته است.

مرحله سوم: اگر درون جزء صحیح مینیمم بوده باشد، آن نقطه نیز پیوسته است.

$$x^2=k \to x=\pm\sqrt{k} \to x=0,\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\dots$$

$$y(x)=x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=(x-1)(x-\sqrt{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\sqrt{2} \end{cases}$$



۱۷- اگر $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}=\frac{۳}{۲}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to b^-}\frac{ax}{x+۸}$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۶-

۳) $-\infty$

۴) $+\infty$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a+b}-2}{1-1}=\frac{3}{2}$$

$x=1$ ← ریشه‌ی صورت هم باشد

$$\Rightarrow \sqrt{a+b}-2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{a+b}=2} \quad (1)$$

$\frac{0}{0}$ H.P $\Rightarrow$

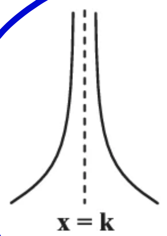
$$\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x}\overset{x=1}{=}\frac{\frac{a}{2\sqrt{a+b}}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{a}{2\times 2}}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow \frac{a}{4}=3\rightarrow \boxed{a=12}$$

$$\sqrt{12+b}=2\Rightarrow 12+b=4\Rightarrow \boxed{b=-8}$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{ax}{x+8}=\lim_{x\to -8^-}\frac{12x}{x+8}=\frac{\overset{-96}{12\times(-8)}}{0^-}=+\infty$$

۱۸- نمودار تابع $y=\dfrac{x-1}{3x^2+ax+12}$ در مجاورت مجانب قائم خود به صورت زیر است. مقدار $a+k$ کدام است؟



۱) -10

۲) 10

۳) 14

۴) -14

$x=k$ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشه

$\rightarrow 3x^2+ax+12=0$

$\Delta=0 \rightarrow a^2-4\times3\times12=0 \rightarrow a^2=12\times12$

غ ق ق

$a=+12 \rightarrow 3x^2+12x+12=3(x^2+4x+4)=3(x+2)^2$

$a=-12 \rightarrow 3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)=3(x-2)^2$

صورت $x-1 \longrightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 2-1>0 & x=k=2 \\ x=-2 \rightarrow -2-1<0 \end{cases}$

$a+k=-12+2=-10$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m، نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(m+4)x-2}{(m+1)x^2+2x+1-m}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۱) مخرج درجه ۱ باشد

$$m+1=0 \rightarrow \boxed{m=-1}$$

۲) مخرج ۲ ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Delta=0 \rightarrow 4-4(m+1)(1-m)=0$$

$$4-4(1-m^2)=0 \rightarrow m^2=0 \rightarrow \boxed{m=0}$$

۳) مخرج و صورت ریشه یکسان داشته باشند.

$$(m+4)x-2=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{2}{m+4}}$$

ریشه صورت

$$(m+1)x^2+2x+(1-m) \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\dfrac{-(1-m)}{m+1}=\dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

① $\dfrac{2}{m+4}=-1 \rightarrow -m-4=2 \rightarrow \boxed{m=-6}$

② $\dfrac{2}{m+4}=\dfrac{m-1}{m+1} \Rightarrow m^2+3m-4=2m+2$

$$\Rightarrow m^2+m-6=0 \rightarrow (m+3)(m-2)=0 \rightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\boxed{m=-1,0,-6,-3,2}$$

۲۰- کدام مورد دربارهٔ حد تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}-x^3-1}$ در $x=0$ صحیح است؟

۱) $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

۲) $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

۳) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

۴) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{0-1}{\sqrt{0+1}-0-1}=\frac{-1}{0}$$

$0^- \to +\infty$

$0^+ \to -\infty$

منحنی را در حوالی $x=0$ بررسی می‌کنیم

$$\sqrt{x^2+1}-x^3-1=g(x)$$

$$g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-3x^2 \xrightarrow{x=0} g'(0)=0$$

آزمایش می‌کنیم

حوالی $x=0$

① $\sqrt{x^2+1}>x^3+1$

② $\sqrt{x^2+1}<x^3+1$

$$\boxed{\sqrt{x^2+1}>x^3+1} \xleftrightarrow{\text{به توان } 2} x^2+1>x^6+2x^3+1$$

$$\leftrightarrow x^6+2x^3-x^2<0 \leftrightarrow x^2(x^4+2x-1)<0$$

$$0^+(0+0-1)<0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)\to 0^+$$