۱) هرگاه x در نامساوی $-۱ < \frac{۴x+۳}{x+۲} < ۴$ برقرار باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{۲}\right]$ شامل چند عضو می باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بی شمار

۲) مجموعه جواب نامعادله $\frac{۷x+۶}{x^۲+۳x} < ۱+\frac{۲}{x}$ کدام است؟

۱) $(-۲,۰)\cup(۰,۳)$ ۲) $(-۳,۰)$

۳) $(۰,۲)$ ۴) $(-۳,۰)\cup(۰,۲)$

۳) جواب نامعادله ی $(x+۱)|۵-x| \le ۸$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴) اگر شخصی فاصله شهر A تا B را با سرعت ۴۰ km / min طی کند، ۸ دقیقه دیرتر و اگر همین فاصله را با سرعت ۶۰ km / min طی کند، ۸ دقیقه زودتر می رسد. او با چه سرعتی این مسیر را طی کند تا دقیقا سر وقت برسد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۸ ۳) ۵۲ ۴) ۴۵

۵) در یک مستطیل با طول a و عرض b رابطه ی $\frac{a+۴b}{a} = \frac{a}{۲b}$ برقرار است. اگر قطر مستطیل $\sqrt{۱۷}$ باشد، مساحت مستطیل چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{۴\sqrt{۱۷}}{۱۷}$ ۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۲\sqrt{۱۷}$

Alpha

چرک نویس

۶) اگر $x=\alpha$ ریشه معادله ی $\sqrt{۴x+۳}+\sqrt{۴x^۲-۴x+۱}=۵$ باشد، مقدار $۴\alpha^۲-۱$ چه عددی است؟

۱) ۸   ۲) ۶   ۳) ۴   ۴) ۳

۷) مجموع ریشه های معادله $\sqrt{x^۲+۱۲\sqrt{۲x-۱}}=x+۲$ کدام است؟

۱) ۱۶   ۲) ۲۰   ۳) ۱۸   ۴) ۲۰

۸) اگر f چند جمله ای صعودی اکید و g چند جمله ای نزولی اکید باشند به طوری که $fof(x)=۹x-۸$ و $gog(x)=۴x-۳$ آنگاه مساحتی که نمودار تابع $y=gof(x)$ با محورهای مختصات می سازد چه عددی است؟

۱) $\frac{۲۵}{۴}$ ۲) $\frac{۲۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵۰}{۳}$ ۴) $\frac{۴۹}{۱۲}$

۹) f تابعی خطی با دامنه ی تعریف $[-۳,۲]$ و برد $[-۵,۱۵]$ مفروض است. عرض نقطه تلاقی دو تابع بدست آمده برای f کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) -۴ ۳) ۵   ۴) ۴

۱۰) هرگاه $f(x)=ax^۲-۳x$ و $g(x)=\frac{۴x-|x|}{۲x}$ به طوری که $fog(x)$ تابعی ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

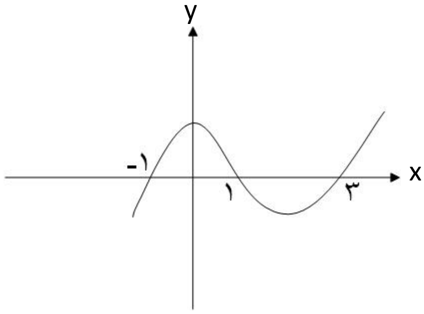
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

چرک نویس

۱۱) اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^{۲}+۳}+۲a & |x|\leq ۱\\ ax^{۲}+۵ & |x|\geq ۱\end{cases}$، ضابطه تابع باشد، مقدار $f(a)$ چه عددی است؟

۱) ۴۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵ ۴) ۱۴

۱۲) اگر نمودار تابع f شکل مقابل باشد، نمودار عبارت $(۴-x^{۲})f(x+۱)$ در کدام مجموعه بالاتر از محور x ها خواهد بود؟



۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۲,۲)$

۳) $(-\infty,۰)-\{-۲\}$ ۴) $(-\infty,۲)-\{۰\}$

۱۳) اگر $f(x)=۳x+۲\sqrt{x}$ به طوری که $f(۲-۳\alpha)<f(۴\alpha+۹)$ ، حدود α کدام است؟

۱) $(-\frac{۹}{۴},-۱)$ ۲) $(\frac{۲}{۳},۱)$ ۳) $(-۱,\frac{۲}{۳}]$ ۴) $(-۱,+\infty)$

۱۴) بزرگترین بازه ای که نمودار $f(x)=ax^{۲}-۷x+۳$ در آن صعودی اکید است بازه $[۰/۷,+\infty)$ است. عرض رأس تابع چه عددی است؟

۱) ۰/۵۵ ۲) ۰/۶۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

چرک نویس

Alpha

۱۵) اگر $f(x)=\dfrac{x}{۲+|x|}$ به طوری که $fof(x)=\dfrac{x}{a+b|x|}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶) هرگاه $gof(x)=-۸x^{۲}-۴x+۴$ و $f(x)=۱-۲x$ باشد، حداکثر مقدار $g(x-۳)$ چه عددی است؟

۱) ۴- ۲) ۴/۵ ۳) ۲/۵- ۴) ۲/۵

۱۷) اگر $f(x)=۲+\sqrt{۹-x^{۲}}$ و $g(x)=۱+۲\sqrt{x+۱}$ ، دامنه تعریف $(f+g)og$ کدام است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $[-۳,۰]$ ۴) $[-۱,۳]$

۱۸) تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۳}$ با دامنه $[-۱,۳]$ مفروض است. برد تابع $fof(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹) اگر $a\in\mathbb{N}$ و $f(x)=(۲-b)x^{۲}+(۲-a)x+۲$ تابعی اکیدا صعودی باشد، دامنه تعریف $g(x)=\sqrt{۲ax-۳f(x)}$ کدام است؟

۱) $[۶,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۶]$ ۳) $[۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۳]$

۲۰) اگر $f=\{(a,b)(۱,b)(۴,۲)(۲,۲)\}$ و $g=\{(b,۲)(۳,۱)(-۲,۳)\}$ به طوری که $(۳,۲)\in gof$ و $(۲,۲)\in fog$ ، مقدار $fog^{-۱}(b)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

چرک نویس

درسنامه: معادلات گویا، گنگ و تعیین علامت

معادلات گویا

برای حل معادلاتی که شامل جملات گویا هستند، معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم، سپس آن را ساده می‌کنیم و جواب‌هایش را به دست می‌آوریم.

البته مخرج مشترک گرفتن و طرفین وسطین هم جزء روش‌های خوب برای حل معادلات گویا است.

تذکر: **حواستان باشد که ریشه‌های به دست آمده، مخرج‌ها را صفر نکنند و همچنین با شرایط مسئله سازگار باشند.**

کاربرد معادلات گویا

گاهی اوقات ابتدا باید معادلات گویا را بسازیم و سپس آن‌ها را حل کنیم. در این تست‌ها که اخیراً مورد استقبال طراحان هم قرار گرفته است، از دو مطلب زیر خیلی استفاده می‌شود:

(۱) اگر شخصی کاری را در n روز انجام دهد، در هر روز $\frac{1}{n}$ کل کار را انجام می‌دهد.

(۲) در فیزیک خواندیم که سرعت (v) همان حاصل تقسیم جابه‌جایی (x) به زمان (t) است، داریم: $\boxed{v=\frac{x}{t}}$

نکته: مستطیلی به طول x و عرض y که نسبت طول به عرض آن $\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ باشد را مستطیل طلایی می‌نامیم.

معادلات گنگ

معادلاتی که شامل رادیکال باشند را معادلات گنگ می‌نامیم. برای حل این معادلات از توان‌رسانی (معمولاً توان دو) کمک می‌گیریم.

تذکر: **(۱) حواستان باشد که جواب‌های به دست آمده از معادله را درون معادله قرار دهید تا مطمئن شوید که قابل قبول هستند و یا می‌توانید دامنهٔ عبارت داده شده را به دست آورید و ببینید جوابی که به دست آورده‌اید در محدودهٔ دامنه قرار دارد یا نه.**

(۲) برای حل معادلات رادیکالی، ابتدا رادیکال را تنها کنید و سایر جملات را به طرف دیگر تساوی ببرید و سپس به توان برسانید.

نکته: وقتی جمع چند عبارت نامنفی (مثل رادیکال با فرجه زوج) صفر شود، باید تک تک جملات صفر باشند و در نهایت جواب معادله، ریشه مشترک همه جملات است.

حل نامعادله

حل نامعادله به یکی از دو روش مقابل انجام می‌شود: (۱) تعیین علامت (۲) خواص نامساوی‌ها

(۱) تعیین علامت: منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که مشخص کنیم عبارت در چه جاهایی مثبت، منفی، صفر و یا تعریف نشده است.

تابع	وضعیت ریشه(ها)	تعیین علامت
$f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$	$ax+b=0\Rightarrow x=\frac{-b}{a}$	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{a}$ … $+\infty$ $ax+b$: مخالف علامت a | 0 | موافق علامت a
$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$	دو ریشهٔ x_1 و x_2 دارد. $\Delta>0\Rightarrow(x_1<x_2)$	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ ax^2+bx+c: موافق علامت a | 0 | مخالف علامت a | 0 | موافق علامت a
	دو ریشهٔ مضاعف x_1 دارد. $\Delta=0\Rightarrow$	x: $-\infty$ … $-\frac{b}{a}$ … $+\infty$ ax^2+bx+c: موافق علامت a | 0 | موافق علامت a همواره موافق علامت a است و تنها در x_1 صفر می‌شود.
	ریشه ندارد. $\Delta<0\Rightarrow$	x: $-\infty$ … $+\infty$ ax^2+bx+c: موافق علامت a همواره موافق علامت a است.

(۲) خواص نامساوی‌ها: در این روش نامعادله را به کمک خواص نامساوی‌ها ساده می‌کنیم تا به یک نامعادله ساده‌تر برسیم و سپس آن را حل می‌کنیم.

۱) دو طرف یک نامساوی را می‌توانیم با عدد دلخواه c (چه مثبت چه منفی) جمع کنیم:

$$\boxed{a<b\xrightarrow{+c}a+c<b+c}$$

۲) ضرب یا تقسیم نامساوی در یک عدد مثبت، جهت را تغییر نمی‌دهد:

$$a<b:\ \begin{cases}\xrightarrow{\times c} ac<bc\\ \xrightarrow{\div c} \frac{a}{c}<\frac{b}{c}\end{cases}$$

۳) ضرب یا تقسیم نامساوی در یک عدد منفی، جهت را عوض می‌کند:

$$a<b\ \begin{cases}\xrightarrow{\times c} ac>bc\\ \xrightarrow{\div c} \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\end{cases}$$

۴) اگر دو طرف نامساوی هم علامت باشند، با معکوس کردن طرفین، جهت عوض می شود ولی اگر مختلف‌العلامت باشند جهت عوض نمی‌شود.

$$\boxed{\begin{cases} a < b \\ ab > ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}} \quad , \quad \boxed{\begin{cases} a < b \\ ab < ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}}$$

تذکر: در نامساوی‌ها زمانی می‌توانیم طرفین وسطین کنیم که از علامت مخرج کسرها مطمئن باشیم. به این ترتیب که اگر مخرج کسرها هم علامت باشند، جهت نامساوی حفظ شده و در غیر این صورت (هم علامت نباشند) پس از طرفین وسطین جهت عوض می‌شود.

تابع

یک ماشین است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد. ورودی‌های مجاز را دامنه (D) و خروجی‌های آن را برد (R) می‌نامیم. تشخیص تابع از دیدگاه‌های مختلف را در جدول زیر ببینید:

تابع	دامنه	برد	تشخیص
نمودار پیکانی از A به B	A	زیرمجموعه ای از B	از هر عضو A دقیقاً یک فلش به عضوی از B برود.
زوج مرتب	مجموعهٔ مؤلفه‌های اول	مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم	نباید مؤلفه‌های اول برابر باشند.
نمودار مختصاتی	تصویر نمودار روی محور xها	تصویر نمودار روی محور yها	هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
ضابطه	xهای مجاز	yهای مجاز	هر رابطه به شکل $y = f(x)$ تابع است.

دامنـــه

دامنهٔ همهٔ توابع برابر $\mathbb{R}$ است به جز توابع گفته شده در جدول زیر:

تابع	دامنه
کسری	$\mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$
رادیکالی با فرجه زوج	زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.
لگاریتمی	در تابع $y = \log_x u$، بین سه شرط $u > ۰$، $x > ۰$ و $x \neq ۱$ اشتراک می‌گیریم.

تذکر: قبل از محاسبهٔ دامنه تابع، هیچ وقت ضابطه تابع را ساده نکنید.

بـــرد

بهترین روش برای پیدا کرد برد توابع، رسم نمودار آن‌ها است. این روش معمولاً برای توابع براکتی، چند ضابطه‌ای و قدرمطلق استفاده می‌شود.

در جدول زیر، برد بعضی از توابع خاص آمده است. آن‌ها را بلد باشید:

ضابطه	برد	ضابطه	برد
$y=ax^2+bx+c\,;a\neq 0$	(۱) $a>0\;;\;R=[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$ (۲) $a<0\;;\;R=(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$	$y=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$R=\{0,-1\}$
$y=\sin x\,,\,y=\cos x$	$R=[-1,1]$	$y=x+\frac{1}{x}$	(۱) $x>0\;;\;R=[2,+\infty)$ (۲) $x<0\;;\;R=(-\infty,-2]$
$y=x-[x]$	$R=[0,1)$	$y=\frac{ax+b}{cx+d}\,;c\neq 0,\,ad-bc\neq 0$	$R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$

تساوی دو تابع

دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را مساوی می‌گوییم هر وقت اولاً دامنه‌هایشان با هم برابر باشند و ثانیاً ضابطه‌هایشا هم یکی باشند.

در این صورت نموداردو تابع f و g بر هم منطبق است.

انتقال و تبدیلات

این‌جا می‌خواهیم از روی نمودار تابع ، نمودارهای جدیدی را رسم کنیم. برای این کار ۶ حالت اصلی زیر را ببینید:

انتقال و تبدیلات	نحوهٔ رسم	دامنه و برد
$y=f(x)+k$	(۱) $k>0: f(x)$ را به اندازه k واحد بالا می‌بریم. (۲) $k<0: f(x)$ را به اندازه k واحد پایین می‌بریم.	دامنه ثابت ولی برد k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y=f(x+k)$	(۱) $k>0: f(x)$ را به اندازه k واحد چپ می‌بریم. (۲) $k<0: f(x)$ را به اندازه k واحد راست می‌بریم.	برد ثابت ولی دامنه k واحد جابه‌جا می‌شود.
$y=kf(x)$	عرض تابع k برابر می‌شود.	دامنه ثابت ولی برد k برابر می‌شود.
$y=f(kx)$	طول تابع $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.	برد ثابت ولی دامنه $\frac{1}{k}$ برابر می‌شود.
$y=-f(x)$	قرینه $f(x)$ نسبت به محور xها	دامنه ثابت ولی برد تغییر می‌کند.
$y=f(-x)$	قرینه $f(x)$ نسبت به محور yها	برد ثابت ولی دامنه تغییر می‌کند.

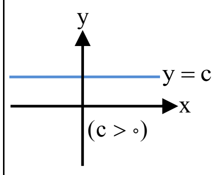
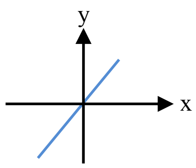
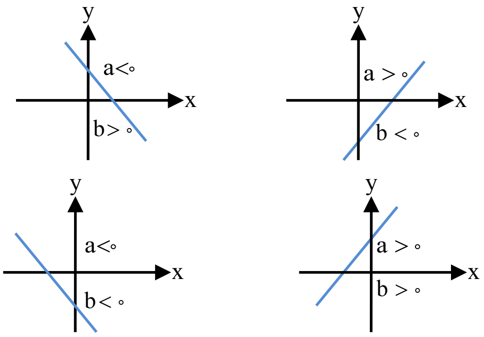
تقدم روی انتقال و تبدیلات: برای رسم تابع $y=af(bx+c)+d$ از روی $f(x)$ تقدم به صورت زیر است:

(۱) c (۲) b (۳) a (۴) d

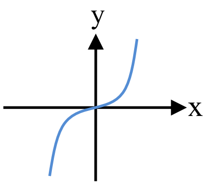
یعنی اینکه از روی $f(x)$ به ترتیب $f(x+c)$، $f(bx+c)$، $af(bx+c)$ و در آخر $af(bx+c)+d$ را رسم می‌کنیم.

توابع خاص

نوبتی هم که باشد، نوبت توابع ثابت، همانی و خطی است. برای یاد گرفتن آن‌ها جدول زیر را به خاطر بسپارید:

تابع	تابع ثابت	تابع همانی	تابع خطی
ضابطه	$y=c$	$y=x$	$y=ax+b\,;\,a\neq 0$
تعریف	به ازای هر ورودی، جوابش c می‌شود.	هر ورودی‌ای که می‌گیرد، خروجی‌اش همان می‌شود.	در ضابطه تابع خطی، a شیب و b عرض از مبدأ است.
نمودار	 «خط افقی»	 «نیمساز ناحیه اول و سوم»	

تابع درجه سوم



ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ است. ساده‌ترین حالت این تابع $y=x^3$ است که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد (شبیه لُره) و همچنین داریم:

$\boxed{\text{دامنه}=\mathbb{R}}$, $\boxed{\text{برد}=\mathbb{R}}$

تذکر: توابع درجه سوم پرکاربرد زیر را ببینید:

$\boxed{y=(x\pm 1)^3=x^3\pm 3x^2+3x\pm 1}$, $\boxed{y=(x\pm 2)^3=x^3\pm 6x^2+12x\pm 8}$

تابع هموگرافیک

هر تابع به فرم $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با دو شرط $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ را هموگرافیک می‌نامیم. دامنه و برد این تابع به صورت زیر است:

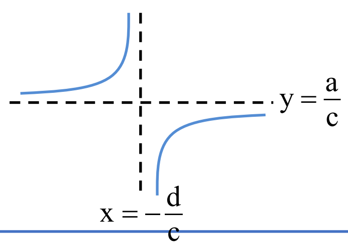
$\boxed{D=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}}$, $\boxed{R=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}}$

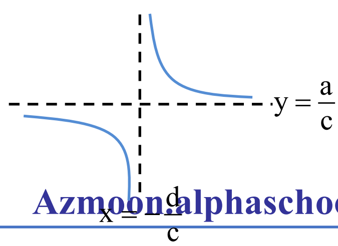
تذکر: در توابع به فرم هموگرافیک:

(۱) اگر $c=0$ باشد، تابع خطی می‌شود. (۲) اگر $ad-bc=0$ باشد، تابع ثابت می‌شود.

$\boxed{ad-bc>0}$ $\boxed{ad-bc<0}$

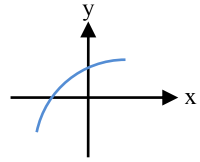
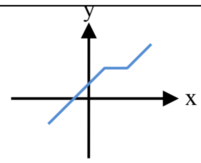
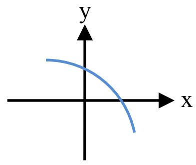
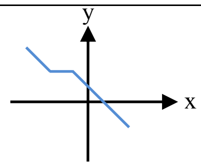
نمودار تابع هموگرافیک



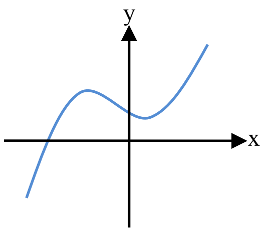


یکنوایی

حالت‌های مختلف یکنوایی را از روی جدول زیر یاد بگیرد:

وضعیت	تعریف فارسی	تعریف ریاضی	مثال
اکیداً صعودی	با افزایش x، مقدار تابع هم زیاد می‌شود.	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	
صعودی	با افزایش x، مقدار تابع یا ثابت می‌ماند یا زیاد می‌شود.	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x، مقدار تابع کم می‌شود.	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	
نزولی	با افزایش x، مقدار تابع یا ثابت می‌ماند یا کم می‌شود.	$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	

تذکر: (۱) توابعی که نه صعودی و نه نزولی باشند را غیریکنوا می‌نامیم. مانند شکل مقابل:



(۲) تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت می‌باشد.

(۳) بهترین روش برای بررسی یکنوایی توابع، رسم آن‌ها است.

یکنوایی توابع معروف

یکنوایی توابع خطی، درجه دوم و هموگرافیک از جمله مطالب مهم در کنکور است.

تابع	وضعیت یکنوایی
تابع خطی $y=ax+b$	(۱) اگر $a>0$ باشد، تابع اکیداً صعودی است. (۲) اگر $a<0$ باشد، تابع اکیداً نزولی است. (۳) اگر $a=0$ باشد، تابع ثابت است. (هم صعودی و هم نزولی)
تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c\,;\,a\neq 0$	(۱) اگر $a>0$ باشد، تابع در بازه $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ اکیداً نزولی و در بازه $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً صعودی است. (۲) اگر $a<0$ باشد، تابع در بازه $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ اکیداً صعودی و در بازه $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً نزولی است. توجه داشته باشید این تابع در کل غیریکنوا است.
تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$	(۱) اگر $ad-bc>0$ باشد، تابع دو شاخه اکیداً صعودی دارد ولی در کل غیریکنوا است. (۲) اگر $ad-bc<0$ باشد، تابع دو شاخه اکیداً نزولی دارد ولی در کل غیریکنوا است.

توابع جزءصحیح

جزءصحیح را با نماد [ ] نمایش می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$[x]=\begin{cases}\text{خود } x & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ \text{عددصحیح قبل } x & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

خواص جزءصحیح

روابط زیر در حل معادلات و نامعادلات جزءصحیح کاربرد زیادی دارند، داریم:

$$1)\ [x]=k \xleftrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le x<k+1$$

$$2)\ [x\pm k]\overset{k\in\mathbb{Z}}{=\!=}[x]\pm k$$

$$3)\ [x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

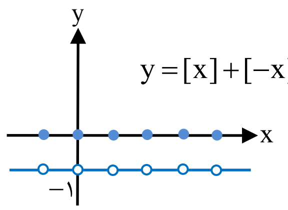
$$4)\ 0\le x-[x]<1$$

نمودار توابع جزءصحیح

نمودار این سه تابع را به خاطر بسپارید:

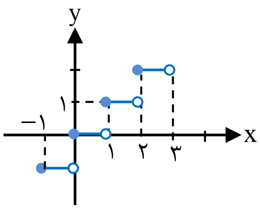
$y=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & ; \quad x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & ; \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

برد $=\{-۱,۰\}$

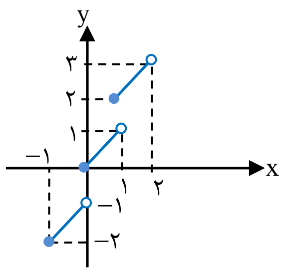
(۲)


$y=[x]$

برد $=\mathbb{Z}$

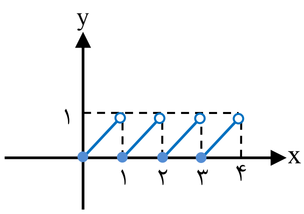
(۱)


$y=x+[x]$

(۴)


$y=x-[x]$

برد $=[۰,۱)$

(۳)


نکته: برای رسم توابعی به صورت $y=[ax]\,(a>۰)$، به کمک بازه‌بندی، طول بازه‌ها را $\frac{۱}{a}$ در نظر می گیریم.

قدرمطلق

قدرمطلق x به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases} x & ; \quad x\geq ۰ \\ -x & ; \quad x<۰\end{cases}$$

به عبارت دیگر قدرمطلق هر عدد مثبت، خود آن عدد و قدرمطلق هر عدد منفی، قرینهٔ آن عدد است.

خواص قدرمطلق

روابط زیر در حل معادلات و نامعادلات قدرمطلقی بسیار مهم است.

۱) $\boxed{|u|\geq ۰}$

۲) $\boxed{|u|=|-u|}$ (قدرمطلقی، منفی‌خوار است.)

۳) $\boxed{\begin{matrix}\sqrt{u^۲}=|u| \\ \sqrt[۳]{u^۳}=u\end{matrix}}$

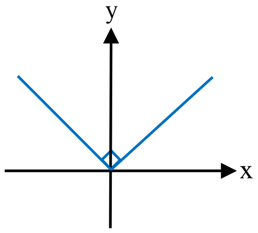
۴) $\boxed{|u|=a \xrightarrow{a>۰} u=\pm a}$

۵) $\boxed{|u|=|v| \Rightarrow u=\pm v}$

۶) $\boxed{|u|<a \xrightarrow{a>۰} -a<u<a}$

۷) $\boxed{|u|>a \xrightarrow{a>۰} \begin{cases} u>a \\ \text{یا} \\ u<-a\end{cases}}$

نمودار توابع قدرمطلقی



نمودار تابع $f(x)=|x|$ به صورت مقابل است:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

اطلاعاتی که از نمودار تابع $f(x)=|x|$ به دست می‌آید؛ به صورت زیر است:

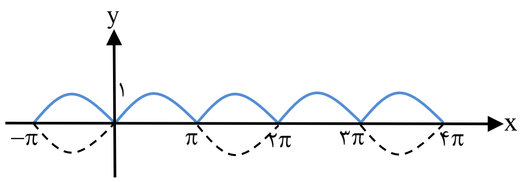
(۱) دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ و برد تابع $[0,+\infty)$ است.

(۲) شیب شاخه‌های نمودار ۱ و ۱− است، پس در مبدأ مختصات، برهم عمودند.

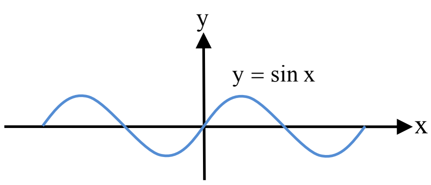
(۳) شاخه‌های نمودار، نیمساز ربع‌های اول و دوم دستگاه مختصات می باشند.

رسم نمودار $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$

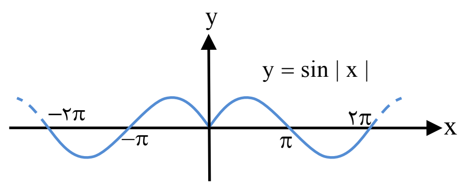
۱) $y=|f(x)|$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس آن قسمت هایی از نمودار که زیر محور xها است را به بالای محور xها تصویر می‌کنیم. برای مثال، نمودار تابع $y=|\sin x|$ به صورت مقابل است:



۲) $y=f(|x|)$: ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، سپس سمت چپ محور yها را حذف می‌کنیم و قرینهٔ سمت راست نمودار را نسبت به محور yها در ست چپ هم تصور می‌کنیم. برای مثال نمودار تابع $y=\sin|x|$ به صورت زیر است:



سمت چپ را حذف و قرینهٔ سمت راست را در سمت چپ می‌کشیم.



ترکیب توابع

منظور از تابع مرکب $f(g(x))$، تابعی است که در آن خروجی‌های $g(x)$، ورودی $f(x)$ شوند. به زبان ساده‌تر داستان به این صورت است که در تابع $f(g(x))$ ابتدا x وارد تابع g می‌شود و سپس $g(x)$ ساخته شده را به جای x در تابع f قرار می‌دهیم. در نهایت $f(g(x))$ به دست می‌آید.

> **نکته:**
> گاهی اوقات تابع مرکب $(fog)(x)$ و یکی از توابع $f(x)$ یا $g(x)$ داده می‌شوند و تابع دیگر خواسته می‌شود. در این تست‌ها دو حالت زیر را در نظر بگیرید:
> ۱) fog و f معلوم باشند: در این حالت که تابع بیرونی یعنی $f(x)$ داده شده است. در ضابطه این تابع به جای x، $g(x)$ قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ به دست آید. در نهایت دو ضابطهٔ $f(g(x))$ را با هم برابر قرار می‌دهیم تا ضابطهٔ $g(x)$ به دست آید. (جای‌گذاری)
> ۲) fog و g معلوم باشند: در این صورت که تابع درونی یعنی $g(x)$ داده شده است، از تغییر متغیر $g(x)=t$ کمک می‌گیریم و x را برحسب t پیدا می‌کنیم و در ضابطهٔ $(fog)(x)$ قرار می‌دهیم. (تغییر متغیر)

دامنهٔ تابع مرکب

دامنهٔ تابع $y=fog(x)$ به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$D_{fog}=\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

البته برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $(fog)(x)$ می‌توانیم تابع $g(x)$ را به جای x در تابع $f(x)$ قرار دهیم تا ضابطهٔ $f(g(x))$ به دست آید و سپس دامنهٔ این تابع را از روی ضابطه‌اش محاسبه کنیم. (فقط توجه داشته باشید در این حالت ساده‌سازی انجام ندهید.)

پاسخنامه

۱) پاسخ : گزینه۴

ابتدا نامعادله را حل می کنیم:

$$\frac{۴x+۳}{x+۲}<۴ \to \frac{۴x+۳}{x+۲}-۴<۰ \to \frac{-۵}{x+۲}<۰ \to x+۲>۰ \to x>-۲$$

$$\frac{۴x+۳}{x+۲}>-۱ \to \frac{۴x+۳}{x+۲}+۱>۰ \to \frac{۵x+۵}{x+۲}>۰ \xrightarrow{x>-۲} ۵x+۵>۰ \to x>-۱$$

جواب نهایی $(-۱,+\infty)$ پس :

$$x>-۱ \to \frac{x}{۲}>-\frac{۱}{۲} \to \left[\frac{x}{۲}\right]=-۱,۰,۱,۲,...$$

پس مجموعه $\left[\frac{x}{۲}\right]$ بی شمار عدد صحیح را قبول می کند.

۲) پاسخ : گزینه۴

ابتدا نامعادله را ساده می کنیم:

$$۱<\frac{۷x+۶}{x^۲+۳x}-\frac{۲}{x} \to ۱<\frac{۷x+۶-۲x-۶}{x(x+۳)}$$

$$\frac{۵x}{x(x+۳)}>۱ \xrightarrow{x\neq ۰} \frac{۵}{x+۳}>۱ \to \frac{۵}{x+۳}-۱>۰$$

$$\frac{-x+۲}{x+۳}>۰ \to \frac{x-۲}{x+۳}<۰$$

حال با فرض $x\neq ۰$ نامعادله $\frac{x-۲}{x+۳}<۰$ را حل می کنیم:

$$\frac{x-۲}{x+۳}<۰ \to -۳<x<۲\ ,\ x\neq ۰ \to (-۳,۰)\cup(۰,۲)$$ جواب نهایی نامعادله است

۳) پاسخ : گزینه۳

$$x\geq ۵:(x+۱)(x-۵)\leq ۸ \to x^۲-۴x-۱۳\leq ۰$$

$$۲-\sqrt{۴+۱۳}\leq x\leq ۲+\sqrt{۴+۱۳} \xrightarrow{x\geq ۵} ۵\leq x\leq ۲+\sqrt{۱۷} \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x=۵,۶$$

$$x\leq ۵:(x+۱)(۵-x)\leq ۸ \to x^۲-۴x+۳\geq ۰$$

$$x\geq ۳ \text{ یا } x\leq ۱ \to \text{جواب}=[۳,۵]\cup(-\infty,۱] \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x=۱,۳,۴,۵$$

پس ۵ جواب طبیعی در جواب داریم $x=۱,۳,۴,۵,۶\in\mathbb{N}$

۴) پاسخ : گزینه۲

فرض کنیم اگر کل مسافت را با سرعت V طی کند آنگاه در زمان t دقیقه سر وقت به مقصد برسد:

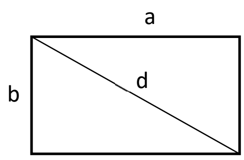
$$x = Vt \rightarrow \begin{cases} x = ۴۰(t+۸) \\ x = ۶۰(t-۸) \end{cases}$$

$$۴۰(t+۸) = ۶۰(t-۸) \rightarrow ۲t+۱۶ = ۳t-۲۴$$

$t = ۴۰' \rightarrow$ مسافت دو شهر $= ۴۰ \times ۴۸ \quad km$

$$\rightarrow ۴۰ \times ۴۸ = V \times ۴۰ \rightarrow V = ۴۸$$

۵) پاسخ : گزینه ۱



$$۲ab + ۸b^۲ = a^۲$$

اگر طرفین را بر $a^۲$ تقسیم کنیم و $\frac{b}{a}$ را x فرض کنیم آنگاه :

$$۲x + ۸x^۲ = ۱ \rightarrow ۸x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

$$(۴x-۱)(۲x+۱) = ۰ \begin{cases} x = \frac{۱}{۴} \\ x = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{۱}{۴} \rightarrow a = ۴b$$

$$d = \sqrt{a^۲ + b^۲} = \sqrt{۱۷b^۲} = b\sqrt{۱۷} = \sqrt{۱۷}$$

$$b = ۱, a = ۴ \rightarrow S = ۴$$

۶) پاسخ : گزینه ۱

$$\sqrt{۴x+۳} + |۲x-۱| = ۵$$

$$x > \frac{۱}{۲} \rightarrow \sqrt{۴x+۳} = ۶-۲x \rightarrow ۴x^۲ + ۳۶ - ۲۴x = ۴x+۳ \rightarrow ۴x^۲ - ۲۸x + ۳۳ = ۰ \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ x = \frac{۱۱}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{۳}{۲} \rightarrow ۲\alpha = ۳ \rightarrow ۴\alpha^۲ = ۹ \rightarrow ۴\alpha^۲ - ۱ = ۸$$

$$x < \frac{۱}{۲} \rightarrow \sqrt{۴x+۳} + ۱ - ۲x = ۵ \rightarrow \sqrt{۴x+۳} = ۲x+۴$$

$$۴x+۳ = ۴x^۲ + ۱۶ + ۱۶x \rightarrow ۴x^۲ + ۱۲x + ۱۳ = ۰ \rightarrow \Delta < ۰$$

پس $۴\alpha^۲ - ۱ = ۸$

۷) پاسخ : گزینه ۱

$$x \geq -۲ \rightarrow x^{۲} + ۱۲\sqrt{۲x-۱} = x^{۲} + ۴x + ۴ \rightarrow ۳\sqrt{۲x-۱} = x+۱ \rightarrow ۹(۲x-۱) = x^{۲} + ۲x + ۱$$

$$\rightarrow x^{۲} - ۱۶x + ۱۰ = ۰ \qquad (x-۸)^{۲} = -۱۰ + ۶۴$$

$$\begin{cases} x-۸ = \sqrt{۵۴} \\ x-۸ = -\sqrt{۵۴} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = ۸+\sqrt{۵۴} \\ x = ۸-\sqrt{۵۴} \end{cases}$$

هر ۲ جواب قابل قبول است. پس : $x_{۱} + x_{۲} = ۱۶$

۸) پاسخ : گزینه۴

f و g هر دو از درجه اول هستند.

$$f(x) = ax + b, a > ۰$$

$$fof(x) = a(ax+b) + b = a^{۲}x + ab + b = ۹x - ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^{۲} = ۹, a > ۰ \rightarrow a = ۳ \\ ۴b = -۸ \rightarrow b = -۲ \end{cases} \rightarrow f(x) = ۳x - ۲$$

$$g(x) = mx + n \rightarrow gog(x) = m(mx+n) + n = ۴x - ۳ \qquad m < ۰$$

$$\begin{cases} m^{۲} = ۴ \rightarrow m = -۲ \\ mn + n = -۳ \rightarrow -n = -۳ \rightarrow n = ۳ \end{cases} \rightarrow g(x) = -۲x + ۳$$

$$gof(x) = -۲(۳x-۲) + ۳ = -۶x + ۷ \begin{cases} A\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۷ \end{matrix}\right. \\ B\left|\begin{matrix} \frac{۷}{۶} \\ ۰ \end{matrix}\right. \end{cases} \rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times \frac{۷}{۶} = \frac{۴۹}{۱۲}$$

۹) پاسخ : گزینه۳

f تابعی خطی است پس فرض می کنیم $f(x) = ax + b$ چون تابع خطی یکنوا است.

دو حالت در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} f(-۳) = -۵ \\ f(۲) = ۱۵ \end{cases} \qquad \begin{matrix} -۳a + b = -۵ \\ ۲a + b = ۱۵ \end{matrix} \rightarrow a = ۴, b = ۷$$

$$\begin{cases} f(-۳) = ۱۵ \\ f(۲) = -۵ \end{cases} \qquad \begin{matrix} -۳a + b = ۱۵ \\ ۲a + b = -۵ \end{matrix} \rightarrow a = -۴, b = ۳$$

$$\begin{cases} f_{۱}(x) = ۴x + ۷ \\ f_{۲}(x) = -۴x + ۳ \end{cases} \Rightarrow f_{۱}(x) = f_{۲}(x) \rightarrow ۴x + ۷ = -۴x + ۳ \rightarrow ۸x = -۴ \rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

$y = ۵ \rightarrow ۵ =$ عرض نقطه تلاقی

۱۰) پاسخ : گزینه۳

$$g(x) = \begin{cases} \frac{۳}{۲} & x > ۰ \\ \frac{۵}{۲} & x < ۰ \end{cases}$$

برای آنکه fog تابعی ثابت باشد باید $f(\frac{۳}{۲}) = f(\frac{۵}{۲})$ یعنی $x = ۲$ محور تقارن سهمی f باشد. یعنی

$$\frac{۳}{۲a} = ۲ \to a = \frac{۳}{۴}$$

۱۱) پاسخ : گزینه۲

برای آنکه تابع باشد باید مقادیر $f(۲)$ و $f(-۲)$ از دو ضابطه برابر باشند

$$\begin{cases} f(۲) = a - b \times ۴ \\ f(۲) = ۲a - b - ۸ \end{cases} \to a - ۴b = ۲a - b - ۸ \to a = ۸ - ۳b$$

$$\begin{cases} f(-۲) = a - b \times ۲ = a - ۲b \\ f(-۲) = -۲a + b - ۸ \end{cases} \to a - ۲b = -۲a + b - ۸ \to ۳a + ۸ = ۳b$$

$$\to a = ۰, b = \frac{۸}{۳}$$

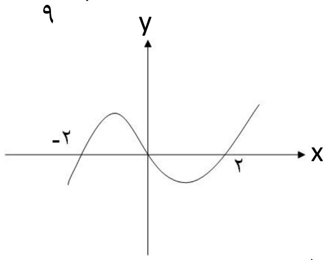
$$f(a) = f(۰) = -\frac{۸}{۳}\sqrt{۱۰}$$

$$f(b) = f(\frac{۸}{۳}) = \frac{۸}{۳} - ۸ = -\frac{۱۶}{۳}$$

$$f(a)f(b) = \frac{۱۲۸}{۹}\sqrt{۱۰}$$

۱۲) پاسخ : گزینه۳

ابتدا برای رسم $f(x+۱)$ نمودار f را یک واحد به چپ انتقال می دهیم.



حال به کمک جدول روبرو عبارت $(۴ - x^۲)f(x+۱)$ را تعیین علامت می کنیم.

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
$f(x+۱)$		-	۰	+	۰	-	۰	+	
$۴ - x^۲$		-	۰	+		+	۰	-	
$(۴ - x^۲)f(x+۱)$		+	۰	+	۰	-	۰	-	

اگر نمودار بالاتر از محور x ها باشد یعنی $f(x) > ۰$ پس

$x \in (-\infty, ۰) - \{-۲\}$

۱۳) پاسخ : گزینه۳

f تابع صعودی اکید با دامنه $[۰, +\infty)$ است پس

$$۲ - ۳\alpha < ۴\alpha + ۹ \to ۷\alpha > -۷ \to \alpha > -۱$$

$$۲ - ۳\alpha \geq ۰ \to \alpha \leq \frac{۲}{۳}$$

$$۴\alpha + ۹ \geq ۰ \to \alpha \geq -\frac{۹}{۴}$$

پس در نهایت :

$$-۱<\alpha\le\frac{۲}{۳}\to\alpha\in(-۱,\frac{۲}{۳}]$$

۱۴) پاسخ : گزینه۱

چون تابع در بازه $[۰/۷,+\infty)$ صعودی اکید است. پس طول راس سهمی برابر $\frac{۷}{۱۰}$ است. یعنی وقتی این بازه بیشترین است پس :

$$-\frac{b}{۲a}=\frac{۷}{۱۰}\to\frac{۷}{۲a}=\frac{۷}{۱۰}\to\frac{۱}{۲a}=\frac{۱}{۱۰}$$

البته $a>۰$ پس دارای Min است

$$a=۵\to f(x)=۵x^{۲}-۷x+۳$$

مختصات راس را بدست می آوریم

$$\mathrm{Min}\left|\begin{array}{l}\frac{۷}{۱۰}\\ ۰/۵۵\end{array}\right.$$

۱۵) پاسخ : گزینه۱

$$fof(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{۲+|f(x)|}=\frac{\frac{x}{۲+|x|}}{۲+\frac{|x|}{۲+|x|}}$$

$$fof(x)=\frac{\frac{x}{۲+|x|}}{\frac{۴+۳|x|}{۲+|x|}}=\frac{x}{۴+۳|x|}\to a+b=۷$$

۱۶) پاسخ : گزینه۲

راه حل اول: چون f خطی اســـت پس نمودار gof و g فقط با انتقال افقی و انبســـاط و انقباض افقی قابل تبدیل اســـت. لذا حداکثر مقدار $gof(x)$ و $g(x)$ و $g(x-۳)$ با هم یکی است.

$$y=-۸x^{۲}-۴x+۴\to S\left|\begin{array}{l}-\frac{۱}{۴}\\ ۴/۵\end{array}\right.$$

راه حل دوم :

$$g(۱-۲x)=-۸x^{۲}-۴x+۴$$

$$۱-۲x=t\to x=\frac{۱-t}{۲}\to g(t)=-۸(\frac{۱-t}{۲})^{۲}-۴(\frac{۱-t}{۲})+۴$$

$$g(t)=-۲(t-۱)^{۲}-۲(۱-t)+۴=-۲t^{۲}+۶t\to g(x-۳)=-۲(x-۳)^{۲}+۶(x-۳)$$

۱۷) پاسخ : گزینه۲

$D_f = [-۳,۳]\ ,\ \ D_g = [-۱,+\infty)$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۱,۳]$

$D_{(f+g)og} = \{x : x \in D_g\ ,\ g(x) \in D_{f+g}\}$

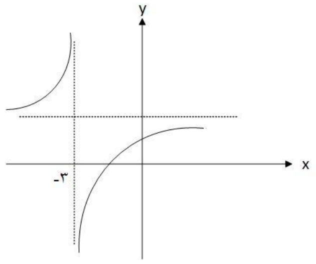
$x \in D_g \Rightarrow x \geq -۱$

$g(x) \in D_{f+g} \to -۱ \leq ۱ + ۲\sqrt{x+۱} \leq ۳ \to \sqrt{x+۱} \leq ۱ \to x \leq ۰ \to D_{(f+g)og} = [-۱,۰]$

۱۸) پاسخ : گزینه۳

$-۱ \leq x \leq ۳ \xrightarrow{f} f(-۱) \leq f(x) \leq f(۳)$

$-۱ \leq f(x) \leq ۱$



f در بازه $[-۱,۱]$ هم صعودی اکید است

$f(-۱) \leq fof(x) \leq f(۱)$

$-۱ \leq fof(x) \leq \frac{۱}{۲}$

$y = ۰,-۱$ اعداد صحیح واقع در برد fof هستند.

۱۹) پاسخ : گزینه۲

قرار است f اکیدا صعودی باشد در نتیجه $b = ۲$ و $۲ - a > ۰$ پس $a \in \mathbb{N}$ لذا $a = ۱$

$f(x) = x + ۲ \to g(x) = \sqrt{۲x - ۳(x+۲)}$

$g(x) = \sqrt{-x-۶} \to -x - ۶ \geq ۰ \to x \leq -۶$

$D_g = (-\infty, -۶]$

۲۰) پاسخ : گزینه۲

$(۳,۲) \in gof \to gof(۳) = ۲ \to ۳ \in D_f \Rightarrow a = ۳ \to gof(۳) = ۲ \to g(b) = ۲$

از طرفی

$(۲,۲) \in fog \to fog(۲) = ۲$

$۲ \in D_g \to b = ۲ \to fog(۲) = f(۲) = ۲$

$fog^{-۱}(b) = fog^{-۱}(۲) = f(۲) = ۲$