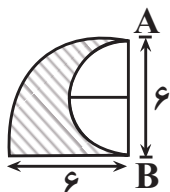


۶۰- در شکل مقابل، از ربع یک دایره، نیم‌دایره‌ای برداشته شده است. حجم شکل حاصل از دوران این شکل، حول محور AB به



$$V = \frac{2\pi}{3} r^3 - \frac{4}{3} \pi r'^3$$

$$V = 4\pi \times 27$$

$$360 \quad V$$

$$80 \quad V'$$

$$V' = \frac{2}{2} \times 4\pi \times 27 = 24\pi$$

$$V' = \frac{80}{360} \times V = \frac{2}{9} V$$

اندازه 80° چقدر است؟

۱) 12π

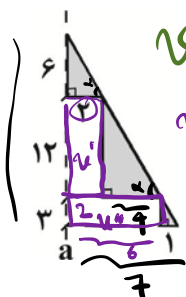
۲) 24π ✓

۳) 18π

۴) $\frac{9\pi}{4}$

۴

۶۱- شکل زیر را حول خط چین a دوران می‌دهیم. حجم شکل فضایی ایجاد شده چند برابر π است؟



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} 7^2 \times 21 = 7^3 \pi = 343\pi$$

$$V' = \pi r^2 h = \pi \times 4 \times 12 = 48\pi$$

$$V'' = \pi r^2 h = \pi \times 36 \times 3 = 108\pi$$

$$V' + V'' = 156\pi$$

$$\frac{-156\pi}{187\pi}$$

$$\rightarrow 187$$

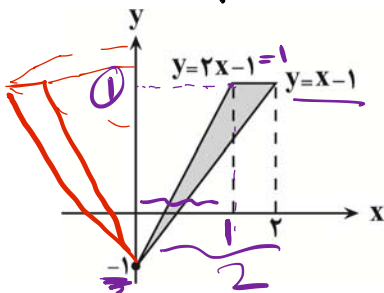
۱) 187 ✓

۲) 152

۳) 129

۴) 96

۶۲- حجم حاصل از دوران ناحیه هاشور خورده حول محور yها به اندازه 180° چقدر است؟



$$V = V' - V'' = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 - r_2^2)$$

$$V = \frac{2\pi}{3} (4-1) = 2\pi$$

$$\div 2 \rightarrow \pi$$

۱) $\frac{\pi}{2}$

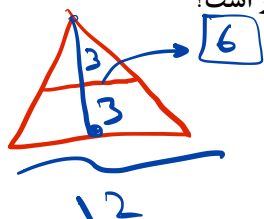
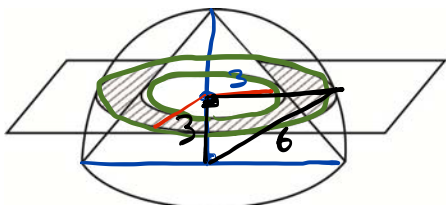
۲) π ✓

۳) $\frac{3\pi}{2}$

۴) 2π

۶۴- از درون نیم کره به شعاع ۶ بزرگترین مخروط ممکن را بر می‌داریم. جسم باقیمانده را با صفحه‌ای که از قاعده نیم کره ۳ واحد

فاصله دارد، برش می‌زنیم. سطح مقطع حاصل چقدر است؟



$$x^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$x = 3\sqrt{3}$$

۱) 24π

۲) 21π

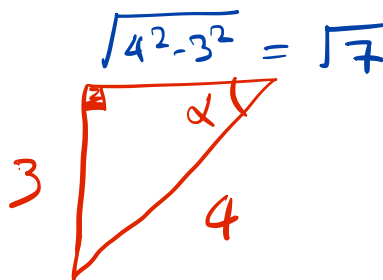
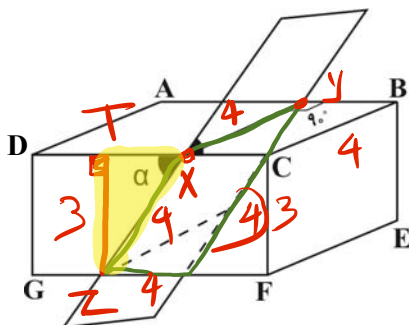
۳) 18π ✓

۴) 15π

$$S = \pi(27) - \pi(9) = 18\pi$$

۶۵- مطابق شکل، صفحه‌ای مکعب مستطیلی به ابعاد $BC = 4$ ، $CF = 3$ و $DC = 8$ را می‌برد. کسینوس زاویه α کدام باشد تا

اندازه اضلاع چهارضلعی سطح مقطع برابر شوند؟



$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

۱) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

۲) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

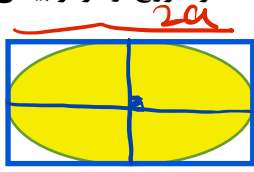
۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ✓

$$e = 0.6 = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 0.64 \rightarrow \frac{b}{a} = 0.8 \quad b = 0.8a$$

۶۶- از برخورد خطوط مماس بر یک بیضی در رئوس آن، مستطیلی به مساحت ۲۰ حاصل شده است. اگر خروج از مرکز بیضی ۰/۶ باشد، فاصله کانونی چقدر است؟



$$4ab = 20 \rightarrow ab = 5$$

$$2b \left\{ \begin{array}{l} 2a \\ ab = 5 \end{array} \right. \rightarrow \frac{4}{5}a^2 = 5$$

فصله کانونی چقدر است؟

$\frac{3}{2}$ (۲)	$\frac{3}{4}$ (۱)	$a = \frac{5}{2}$
$\frac{6}{4}$ (۴)	$2c$ (۳)	$b = 2$

۶۷- در یک بیضی به مرکز $O(2, -3)$ ، مختصات یکی از کانون‌ها $(2, -6)$ و مختصات یکی از رئوس ناکانونی $(6, -3)$ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

0.75 (۲)	0.8 (۱)
0.4 (۴)	0.6 (۳) ✓

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1.5$$

$$6.25 - 4$$

$$b = 4 \rightarrow a = 5$$

$$c = 3 \rightarrow e = 0.6$$

۶۸- فاصله کانونی یک بیضی، میانگین دو قطر می‌باشد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

0.6 (۲)	0.5 (۱)
0.8 (۴) ✓	0.7 (۳)

۶۹- در بیضی مقابل، مساحت مثلث ABF' ، برابر مساحت مثلث ABF است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

0.2 (۱)	0.4 (۲)
0.6 (۳) ✓	0.8 (۴)

$$e = \sqrt{1 - 0.36} = 0.8$$

$$\frac{S_{\triangle BF'F}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{3S}{5} = 3 = \frac{2c}{a-c} \rightarrow 3a = 5c$$

$$\frac{c}{a} = 0.6 = e$$

$$2c = \frac{2a + 2b}{2} = a + b$$

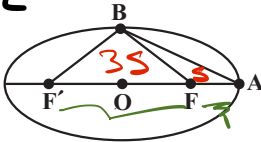
$$a - b = \frac{c}{2}$$

$$a + b = 2c$$

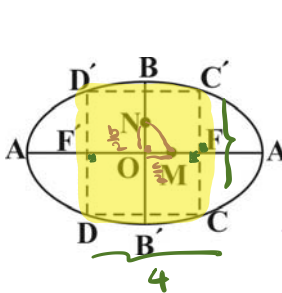
$$\frac{a+b}{a-b} = 4$$

$$3a = 5b$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$$



۷۰- اگر خروج از مرکز بیضی مقابل برابر $\frac{1}{4}$ و M و N به ترتیب وسط OF و OB باشد و $MN = 4$ باشد، مساحت چهارضلعی $DD'C'C$ چقدر است؟ (ف' و F کانون‌های بیضی‌اند.)



$$\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} = 16$$

$$b^2 + c^2 = 64 = a^2$$

$$a = 8$$

$$e = \frac{1}{4} \rightarrow c = 2$$

$$\rightarrow b = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$S_{DD'C'C} = \frac{2b^2}{a} = \frac{120}{8} = 15$$

$$S = 15 \times 4 = 60$$

۷۱- معادله خط گذرا از قطر بزرگ بیضی $mx + y + 3 = 0$ و مختصات کانون‌های آن $F(6, 3)$ و $F'(0, a)$ است. معادله خط گذرا از قطر کوچک بیضی کدام است؟

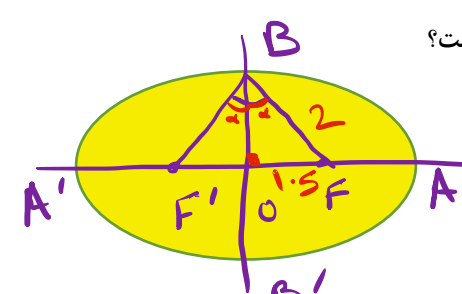
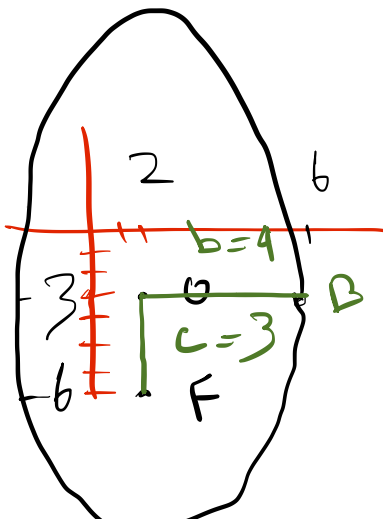
$$6m + 3 + 3 = 0$$

$$\rightarrow m = -1$$

$$\begin{cases} a + 3 = 0 \\ a = -3 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 0 \mid 3 \\ 0 \mid 0 \end{array} \right. \begin{cases} y = -x + b \\ b = 3 \end{cases}$$

$x - y = 3$ (۲)	$x + y = 3$ (۱)	$y + x = 3$ ✓
$2x - y = 6$ (۴)	$2x + y = 6$ (۳)	

۷۲- در یک بیضی فاصله کانونی ۳ و طول قطر بزرگ بیضی ۴ است. اگر B یکی از رأس‌های غیرکانونی و F و F' کانون‌های بیضی باشند، مقدار کسینوس زاویه $\angle FBF'$ کدام است؟



$$\sin \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \frac{9}{8} = \frac{-1}{8}$$

$\frac{3}{4}$ (۲)	$-\frac{1}{9}$ (۱)
$\frac{4}{5}$ (۴)	$-\frac{1}{8}$ (۳) ✓

$$c = 1.5$$

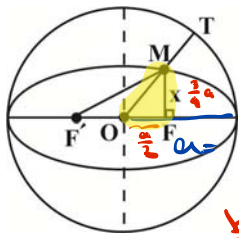
$$a = 2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{MT}{OM} = \frac{OT - OM}{OM} = \frac{OT}{OM} - 1 = \frac{4}{\sqrt{13}} - 1$$

آزمون ۱۴ اردیبهشت ماه - دفترچه سوم

۷۳- مطابق شکل، یک بیضی هم مرکز با دایره بوده و درون آن محاط شده است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{1}{2}$ باشد، $\frac{MT}{OM}$



کدام است؟ (OT شعاع دایره است.)

$a = 2c$

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}a$

$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

شعاع دایره

$OM^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{13}{16}a^2$

$OM = \frac{\sqrt{13}}{4}a$

۱) $\frac{\sqrt{13}}{4}$
 ۲) $\frac{4\sqrt{13}}{13} - 1$
 ۳) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
 ۴) $\frac{\sqrt{13}}{4}$

۷۴- مجموع طول نقاط تقاطع محور طول ها و دایره های که با کمترین مساحت از دو نقطه $A(-4, 5)$ و $B(2, 1)$ می گذرد، کدام است؟

$2r = AB = 2\sqrt{13} \Rightarrow r = \sqrt{13}$

$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$

$y=0 \Rightarrow |x+1|=2 \Rightarrow x=1$ or $x=-3$

۱) ۲
 ۲) ۳
 ۳) ۱
 ۴) ۲

۷۵- فاصله نقطه $A(-4, -5)$ از قطری از دایره $x^2 + y^2 - 4y + 6x - 1 = 0$ که بر خط $x - 3y = 5$ عمود است، کدام است؟

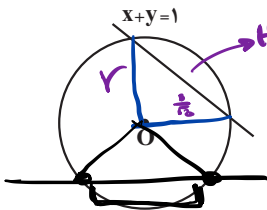
$y = -3x + 3$

$\rightarrow y + 3x - 3 = 0$

$\frac{|-5 - 12 - 3|}{\sqrt{12 + 32}} = \frac{20}{\sqrt{44}} = \frac{2\sqrt{110}}{\sqrt{44}} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{11}} = \sqrt{10}$

۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
 ۲) $\sqrt{10}$
 ۳) $2\sqrt{10}$
 ۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۷۶- دایره ای به مرکز $O(-1, -1)$ بر روی خط $x + y = 1$ و تری به طول ۲ جدا می کند. این دایره روی محور x و تری با کدام اندازه جدا می کند؟



$OH = \frac{|-1 - 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$r^2 = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$

$|x+1|^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$

$y=0 \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

۱) ۱
 ۲) ۲
 ۳) $3\sqrt{2}$
 ۴) $2\sqrt{3}$

۷۷- دایره ای را در نظر بگیرید که از دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(-1, 0)$ می گذرد و مرکز آن روی خط $y = x - 2$ قرار دارد. کدام یک از نقاط زیر، روی این دایره قرار دارد؟

$m_{AB} = \frac{1}{-3}$

نقاط زیر، روی این دایره قرار دارد؟

۱) $(0, \sqrt{5})$
 ۲) $(0, 2)$
 ۳) $(2, -3)$
 ۴) $(2, 2)$

۷۸- دایره ای از نقاط $(5, 2)$ و $(3, 0)$ و $(-1, 4)$ می گذرد. حداکثر فاصله نقاط روی دایره از محور طول ها چقدر است؟

۱) $3 + \sqrt{5}$
 ۲) $3 + \sqrt{10}$
 ۳) $2 + \sqrt{5}$
 ۴) $2 + \sqrt{10}$

۷۹- دو دایره $x^2 + y^2 + 4x + ny + 12 = 0$ و $2x^2 + 2y^2 + mx - 12y + 8 = 0$ هم مرکزند. مساحت کوچکترین دایره ای که بر هر دو مماس است، کدام است؟

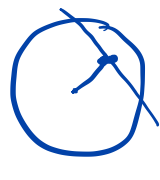
۱) $\frac{\pi}{2}$
 ۲) $\frac{3\pi}{2}$
 ۳) π
 ۴) 2π

۸۰- کوتاه ترین وتر دایره $x^2 + y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$ که از نقطه $A(1, -2)$ می گذرد، نیمساز ناحیه سوم را در نقطه B قطع می کند. فاصله B تا مبدأ کدام است؟

$x^2 + y^2 + 2x + 8y + \frac{1}{2} = 0$

$y = x$

۱) $\sqrt{2}$
 ۲) $2\sqrt{2}$
 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 ۴) ۲



$m_{AO} = \frac{-2}{-2} = 1$

$m'_{AO} = -1$

$d: y = -x - 1$

$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$
 $y = -\frac{1}{2}$