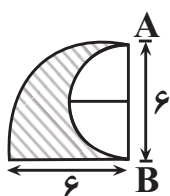


۶۰- در شکل مقابل، از ربع یک دایره، نیم‌دایره‌ای برداشته شده است. حجم شکل حاصل از دوران این شکل، حول محور AB به



$$V = \frac{2\pi}{3} r^3 - \frac{4}{3} \pi r'^3$$

$$V = 4\pi \times 27$$

$$360 \quad V$$

$$80 \quad V'$$

اندازه 80° چقدر است؟

۱۲π (۱)

۲۴π (۲) ✓

۱۸π (۳)

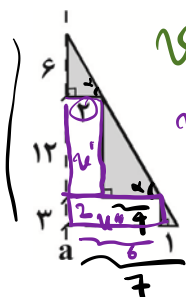
$\frac{9\pi}{4}$ (۴)

۴

$$V' = \frac{2}{2} \times 4\pi \times 27 = 24\pi$$

$$V' = \frac{80}{360} \times V = \frac{2}{9} V$$

۶۱- شکل زیر را حول خط چین a دوران می‌دهیم. حجم شکل فضایی ایجاد شده چند برابر π است؟



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} 7^2 \times 21 = 7^3 \pi = 343\pi$$

$$V' = \pi r^2 h = \pi \times 4 \times 12 = 48\pi$$

$$V'' = \pi r^2 h = \pi \times 36 \times 3 = 108\pi$$

$$V' + V'' = 156\pi$$

$$\frac{-156\pi}{187\pi}$$

$$\rightarrow 187$$

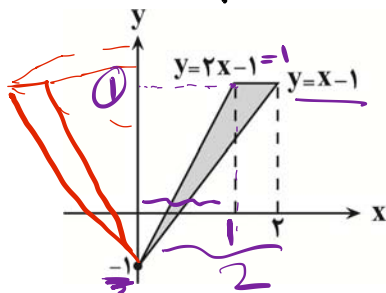
۱۸۷ (۱) ✓

۱۵۲ (۲)

۱۲۹ (۳)

۹۶ (۴)

۶۲- حجم حاصل از دوران ناحیه هاشور خورده حول محور yها به اندازه 180° چقدر است؟



$$V = V' - V'' = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 - r_2^2)$$

$$V = \frac{2\pi}{3} (4-1) = 2\pi$$

$$\div 2 \rightarrow \pi$$

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

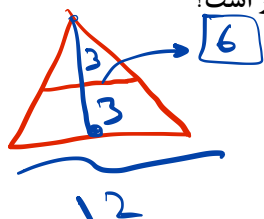
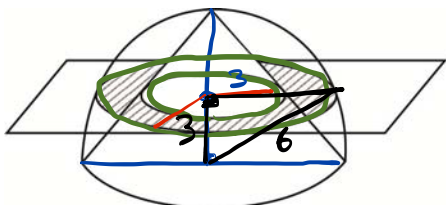
π (۲) ✓

$\frac{3\pi}{2}$ (۳)

2π (۴)

۶۴- از درون نیم‌کره به شعاع ۶ بزرگترین مخروط ممکن را بر می‌داریم. جسم باقیمانده را با صفحه‌ای که از قاعده نیم‌کره ۳ واحد

فاصله دارد، برش می‌زنیم. سطح مقطع حاصل چقدر است؟



$$x^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$x = 3\sqrt{3}$$

۲۴π (۱)

۲۱π (۲)

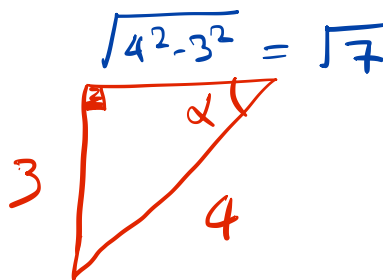
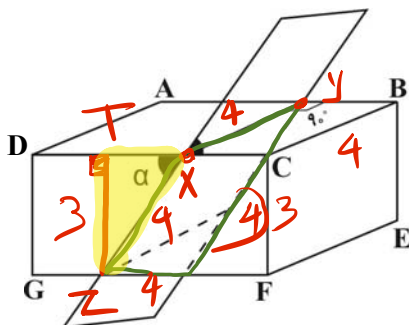
۱۸π (۳) ✓

۱۵π (۴)

$$S = \pi(27) - \pi(9) = 18\pi$$

۶۵- مطابق شکل، صفحه‌ای مکعب مستطیلی به ابعاد BC = ۴، CF = ۳ و DC = ۸ را می‌برد. کسینوس زاویه α کدام باشد تا

اندازه اضلاع چهارضلعی سطح مقطع برابر شوند؟



$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\frac{\sqrt{6}}{4}$ (۱)

$\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۲)

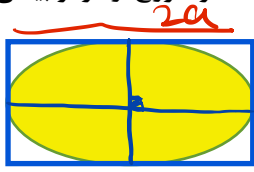
$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{7}}{4}$ (۴) ✓

$$e = 0.6 = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 0.64 \rightarrow \frac{b}{a} = 0.8 \quad b = 0.8a$$

۶۶- از برخورد خطوط مماس بر یک بیضی در رئوس آن، مستطیلی به مساحت ۲۰ حاصل شده است. اگر خروج از مرکز بیضی ۰/۶ باشد، فاصله کانونی چقدر است؟



$$4ab = 20 \rightarrow ab = 5$$

$$\frac{3}{2} \quad \frac{3}{4} \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$2c \quad 3 \rightarrow b = 2$$

۶۷- در یک بیضی به مرکز $O(2, -3)$ ، مختصات یکی از کانون‌ها $(2, -6)$ و مختصات یکی از رئوس ناکانونی $(6, -3)$ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$$\frac{2}{2} \quad \frac{3}{4} \rightarrow e = 0.6$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1.5$$

$$6.25 - 4$$

$$b = 4 \rightarrow a = 5$$

$$c = 3 \rightarrow e = 0.6$$

۶۸- فاصله کانونی یک بیضی، میانگین دو قطر می‌باشد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$$\frac{2}{6} \quad \frac{3}{5} \rightarrow e = 0.6$$

$$2c = \frac{2a + 2b}{2} = a + b$$

$$c^2 = (a+b)(a-b) \rightarrow c = 2(a-b)$$

۶۹- در بیضی مقابل، مساحت مثلث ABF' ، برابر مساحت مثلث ABF است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

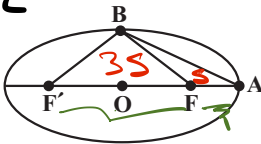
$$\frac{2}{2} \quad \frac{3}{4} \rightarrow e = 0.6$$

$$a - b = \frac{c}{2}$$

$$a + b = 2c$$

$$\frac{a+b}{a-b} = 4$$

$$3a = 5b$$

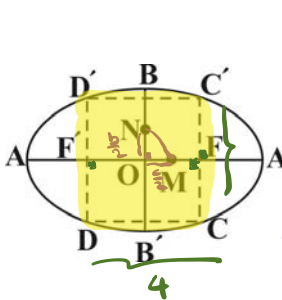


$$e = \sqrt{1 - 0.36} = 0.8$$

$$\frac{S_{\triangle ABF'}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{3S}{S} = 3 = \frac{2c}{a-c} \rightarrow 3a = 5c$$

$$\frac{c}{a} = 0.6 = e$$

۷۰- اگر خروج از مرکز بیضی مقابل برابر $\frac{1}{4}$ و M و N به ترتیب وسط OF و OB باشد و $MN = 4$ باشد، مساحت چهارضلعی $DD'C'C$ چقدر است؟ (ف و F' کانون‌های بیضی اند.)



$$\frac{b^2 + c^2}{4} = 16$$

$$b^2 + c^2 = 64 = a^2$$

$$a = 8$$

$$c' = \frac{2b^2}{a} = \frac{120}{8} = 15$$

$$S = 15 \times 4 = 60$$

۷۱- معادله خط گذرا از قطر بزرگ بیضی $mx + y + 3 = 0$ و مختصات کانون‌های آن $F(6, 3)$ و $F'(0, a)$ است. معادله خط گذرا از قطر کوچک بیضی کدام است؟

$$6m + 3 + 3 = 0 \rightarrow m = -1$$

$$a + 3 = 0 \rightarrow a = -3$$

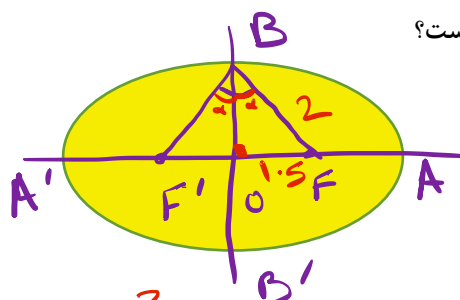
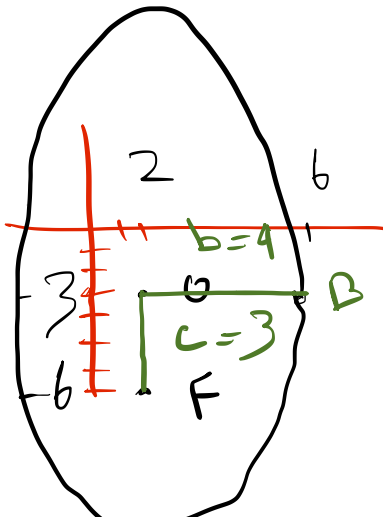
$$y = -x + b$$

$$b = 3$$

$$x - y = 3 \quad x + y = 3$$

$$2x - y = 6 \quad 2x + y = 6$$

۷۲- در یک بیضی فاصله کانونی ۳ و طول قطر بزرگ بیضی ۴ است. اگر B یکی از رأس‌های غیرکانونی و F و F' کانون‌های بیضی باشند، مقدار کسینوس زاویه $\angle FBF'$ کدام است؟



$$\frac{3}{4} \quad \frac{1}{9} \rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$1 - \frac{9}{8} = \frac{-1}{8}$$

$$c = 1.5$$

$$a = 2$$

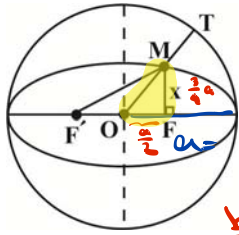
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{MT}{OM} = \frac{OT - OM}{OM} = \frac{OT}{OM} - 1 = \frac{4}{\sqrt{3}} - 1$$

آزمون ۱۴ اردیبهشت ماه - دفترچه سوم

$$\frac{MT}{OM}$$

۷۳- مطابق شکل، یک بیضی هم مرکز با دایره بوده و درون آن محاط شده است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{1}{2}$ باشد،



$$a = 2c$$

$$a = r$$

$$x = \frac{2b^2}{2a} = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{4}a$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

شعاع دایره

$$OM^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$OM = \frac{\sqrt{13}}{4}a$$

$$\frac{\sqrt{13}}{4} \quad (1)$$

$$\frac{4\sqrt{13}}{13} - 1 \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

۷۴- مجموع طول نقاط تقاطع محور طول‌ها و دایره‌های که با کمترین مساحت از دو نقطه $A(-4, 5)$ و $B(2, 1)$ می‌گذرد، کدام است؟

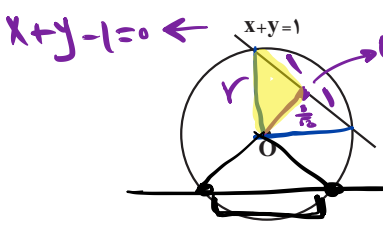
$$| \begin{array}{c} -1 \\ 3 \end{array} | \quad 2r = AB = 2\sqrt{3} \rightarrow r = \sqrt{3} \quad \left| \begin{array}{c} (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13 \\ y=0 \rightarrow |x+1|=2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}$$

۷۵- فاصله نقطه $A(-4, -5)$ از قطری از دایره $x^2 + y^2 - 4y + 6x - 1 = 0$ که بر خط $x - 3y = 5$ عمود است، کدام است؟

$$y = -3x + 3 \rightarrow y + 3x - 3 = 0$$

$$| \begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array} | \quad \frac{|-5 - 12 - 3|}{\sqrt{12 + 3^2}} = \frac{20}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{30}}{3}$$

۷۶- دایره‌ای به مرکز $O(-1, -1)$ بر روی خط $x + y = 1$ و تری به طول ۲ جدا می‌کند. این دایره روی محور x ها و تری با کدام اندازه جدا می‌کند؟



$$OH = \frac{|-1 - 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \left| \begin{array}{c} (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2} \\ y=0 \rightarrow (x+1)^2 = \frac{3}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}$$

۷۷- دایره‌ای را در نظر بگیرید که از دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(-1, 0)$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط $y = x - 2$ قرار دارد. کدام یک از نقاط زیر، روی این دایره قرار دارد؟

$$m_{AB} = \frac{1}{3} \quad A' = \left| \begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| \quad r = \sqrt{5}$$

$$m_{A'B} = -3 \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$$

۷۸- دایره‌ای از نقاط $(5, 2)$ و $(3, 0)$ و $(-1, 4)$ می‌گذرد. حداکثر فاصله نقاط روی دایره از محور طول‌ها چقدر است؟

$$y = 5 - x$$

$$y = x + 1$$

$$| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} | \quad r = \sqrt{12 + 3^2} = \sqrt{15}$$

۷۹- دو دایره $x^2 + y^2 + 4x + ny + 12 = 0$ و $2x^2 + 2y^2 + mx - 12y + 8 = 0$ هم‌مرکزند. مساحت کوچکترین دایره‌ای که بر هر دو مماس است، کدام است؟

$$| \begin{array}{c} -2 \\ -n \end{array} | \quad \left. \begin{array}{l} n = -6 \\ m = 8 \end{array} \right\} \quad O = O' = \left| \begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array} \right|$$

$$| \begin{array}{c} -m \\ +3 \end{array} | \quad r = 1, r' = 3 \quad x = \frac{3-1}{2} = 1 \rightarrow r = \pi$$

۸۰- کوتاه‌ترین وتر دایره $2x^2 + 2y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$ که از نقطه $A(1, -2)$ می‌گذرد، نیمساز ناحیه سوم را در نقطه B قطع می‌کند. فاصله B تا مبدأ کدام است؟

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 16y + 1 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 8y + \frac{1}{2} = 0$$

$$| \begin{array}{c} -1 \\ -4 \end{array} | \quad r = \sqrt{16.5}$$

$$m_{AO} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad d: y = -x - 1 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$m'_{AO} = -1 \quad b = -1 \quad \left| \begin{array}{c} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$