

1- با فرض $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|} + 1$ مقدار $f'_+(1) - f'_-(0)$ چه عددی است؟

$x > 1 \rightarrow |x| = 1$

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$x < 0 \rightarrow |x| = -1$

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳) ✓

$\frac{1}{2}$ (۲)

(۱)

$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$, $f'_+(1) = \frac{2}{2} = 1$

$f'_-(0) = \frac{-1}{2}$

$1 - (\frac{-1}{2}) = \frac{3}{2}$

2- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+3}}$ در $x=1$ محور عرض ها را در کدام نقطه قطع می کند؟

$f(1) = \frac{1}{2}$

$A(0, \frac{3}{16})$ (۴)

$A(0, \frac{5}{16})$ (۳) ✓

$A(0, \frac{1}{2})$ (۲)

$A(0, \frac{3}{8})$ (۱)

$f'(x) = \frac{\frac{3}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x+3}}}$

$f'(1) = \frac{\frac{3}{16}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{16}$

$y = \frac{3}{16}x + b \rightarrow b = y - \frac{3x}{16} = \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$

3- هرگاه $f(x) = \sqrt{\tan \frac{\pi}{\sqrt{x+3}}}$ باشد، مقدار $f'(13)$ چه عددی است؟

$f(x) = (\tan(g(x)))^{\frac{1}{2}}$ $-\frac{\pi}{64}$ (۴)

$\frac{\pi}{64}$ (۳)

$\frac{\pi}{128}$ (۲)

$-\frac{\pi}{128}$ (۱) ✓

$f'(x) = \frac{1}{2} (\tan \frac{\pi}{\sqrt{x+3}})^{-\frac{1}{2}} (1 + \tan^2 \frac{\pi}{\sqrt{x+3}}) (\frac{0 - \frac{\pi}{2\sqrt{x+3}}}{x+3})$

$f'(13) = \frac{1}{2} (1) (2) (\frac{-\pi}{8 \cdot 16}) = \frac{-\pi}{8 \times 16} = \frac{-\pi}{128}$

4- اگر $f(x) = 4x + 4\sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - \frac{4}{x} - 5$ باشد، مشتق تابع $(f \circ g)(\frac{4}{x})$ به ازای $x = -2$ کدام است؟

18 (۴) ✓

-18 (۳)

12 (۲)

-12 (۱)

$y = f \circ g \circ h(x)$

$y' = h'(x) \cdot g'(h(x)) \cdot f'(g \circ h(x))$ $\left\{ h(x) = \frac{4}{x} \mid g'(x) = 2x + \frac{4}{x^2} \right.$

$y' = \frac{-4}{x^2} \cdot (2(\frac{4}{x}) + \frac{4}{(\frac{4}{x})^2}) \cdot (4 + \frac{2}{\sqrt{g \circ h(x)}})$ $f'(x) = 4 + \frac{2}{\sqrt{x}}$

$x = -2 \rightarrow$

$h(-2) = -2$

$g(-2) = 4 + 2 - 5 = 1$

$g \circ h(-2) = 1$

$\rightarrow -6(-4 + 1) = (-6)(-3) = +18$

۵- اگر $f\left(\frac{2}{x}\right) = -x + \sqrt{x+3}$ و برای تابع مشتق پذیر g ، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x^2) - g(1)}{2x^2 - 3x + 1} = 6$ باشد، مقدار $(g \circ f)'(3)$ چه عددی است؟

$$\frac{2}{1} (4)$$

$$\frac{1}{4} (3)$$

$$x=1 \quad f(3)=1 \quad (1)$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H\&P} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x g'(x^2)}{4x - 3} = \frac{2g'(1)}{1} = 6 \rightarrow g'(1) = 3$$

$$f'(3) g'(1) = 3 f'(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3}{x^2} f'\left(\frac{3}{x}\right) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \\ x=1 \rightarrow -3 f'(3) = -1 + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} \end{array} \right.$$

۶- اگر $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ در نقطه‌ای به طول $x = -1$ بر هم مماس باشند، مقدار مشتق $y = g \circ f(x)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

$$g(-1) = f(-1) = a$$

$$g'(-1) = f'(-1)$$

$$14 (4)$$

$$-14 (3)$$

$$42 (2)$$

$$-42 (1)$$

$$3x^2 + a \rightarrow 3 + a$$

$$2x - \frac{2}{x^2} \rightarrow \frac{-4}{x^3}$$

$$2 + \frac{4}{x^3} \xrightarrow{x=1} 6$$

$$-1 - a + b = 6 + b = 1 - 2 = -1 \rightarrow b = -7$$

$$g \circ f' \rightarrow f''(1) \times g'(1)$$

$$6 \times g'(1) = 6(-7) = -42$$

۷- اگر $g'(x) = \frac{2}{x^3}$ و $f\left(\frac{2}{x}\right) = g(\sqrt{x})$ باشد، مقدار $f''(2)$ چه عددی است؟

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$3 \text{ صفر}$$

$$1 (2)$$

$$-\frac{1}{2} (1)$$

$$f(x) = g(\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}})$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot g'(\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}})$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$$

$$g'(\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}}) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = 0$$

$$f(x) - g(x)$$

۸- اگر $f(x) = \cos^3 x \sin x$ و $g(x) = \sin^3 x \cos x$ باشد، حاصل $f''\left(\frac{\pi}{16}\right) - g''\left(\frac{\pi}{16}\right)$ چه عددی است؟

$$-4\sqrt{2} (4)$$

$$4\sqrt{2} (3)$$

$$2\sqrt{2} (2)$$

$$-2\sqrt{2} (1)$$

$$f'(x) = 3 \cos^2 x (-\sin x) \sin x + \cos x \cos^3 x = -3 \cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x$$

$$f''(x) = 4 \cos^3 x (-\sin x) - \frac{3}{2} \sin 4x = \frac{-1}{2} (8 \cos^3 x \sin x + 3 \sin 4x)$$

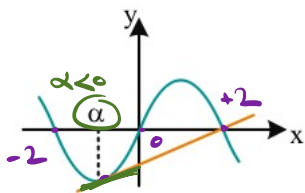
$$g'(x) = 3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin^2 2x - \sin^4 x$$

$$g''(x) = \frac{3}{2} \sin 4x - 4 \sin^3 x \cos x$$

$$-4 \cos^3 \sin + 4 \sin^3 \cos - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$4 \sin x (\sin^2 - \cos^2) = 2 \sin 2x (-\cos 2x) = -\sin 4x \quad | -2\sqrt{2}$$

مقدار α کدام است؟ $f(x) = 4x - x^2$



$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & f(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} (1)$$

$$y = m x + b$$

$$-1 (1)$$

$$-\frac{1}{3} (1)$$

$$y' = m$$

$$4 - 3x^2$$

$$f(x) = x(2-x)(2+x)$$

$$f'(x) = m$$

$$m = \frac{f(\alpha)}{\alpha - 2} = f'(\alpha)$$

$$\frac{4\alpha - \alpha^3}{\alpha - 2} = -\alpha(2 + \alpha) = 4 - 3\alpha^2$$

$$-2\alpha - \alpha^2 = 4 - 3\alpha^2$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \frac{2x+10}{x+6}$ در بازه $[-\alpha, \alpha]$ برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x = -3$ است. مقدار α کدام است؟

$$f'(x) = \frac{12-10}{(x+6)^2} = \frac{2}{(x+6)^2}$$

$$f'(-3) = \frac{2}{9}$$

$$\frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} = \frac{\frac{2\alpha+10}{\alpha+6} - \frac{-2\alpha+10}{-\alpha+6}}{2\alpha} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{-2\alpha}{\alpha^2-36} = \frac{2\alpha}{9} \rightarrow \alpha = 0$$

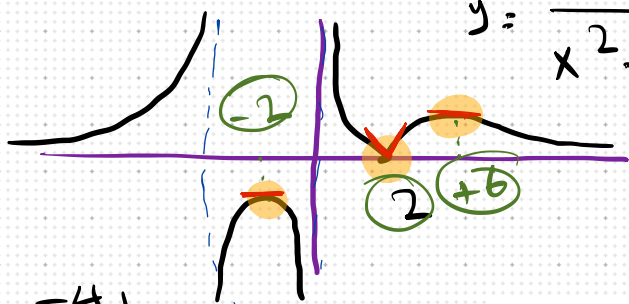
$$\frac{\alpha+5}{\alpha+6} + \frac{5-\alpha}{\alpha-6} = \frac{2\alpha}{9}$$

$$\rightarrow -9 = \alpha^2 - 36 \rightarrow \alpha^2 = 27 \rightarrow \alpha = \pm 3\sqrt{3}$$

مجموع طول نقاط بحرانی تابع $y = \frac{|x-2|}{x^2+6x}$ کدام است؟

$$y = \frac{x-2}{x^2+6x}$$

$$y = \frac{|x-2|}{x^2+6x}$$



$$\frac{x^2+6x - (2x+6)(x-2)}{(x^2+6x)^2} = 0$$

$$x^2+6x = 2x^2+2x-12$$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\begin{matrix} +6 \\ -2 \end{matrix}$$

$$\lfloor \frac{-4}{3} \rfloor = -2$$

بیشترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{(x+a)^2}$ برابر صفر است. مقدار $[-\frac{2a}{3}]$ کدام است؟

$$-4 (4)$$

$$-3 (3)$$

$$-2 (2) = 0$$

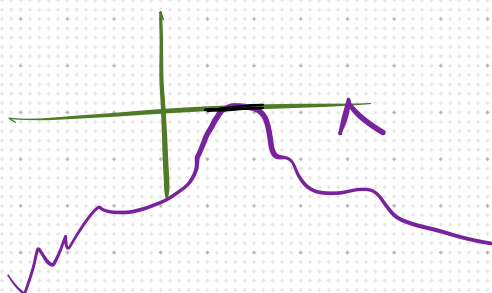
$$-1 (1)$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{(x+a)^2} \rightarrow 8x = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + (2a-8)x + a^2 = 0$$

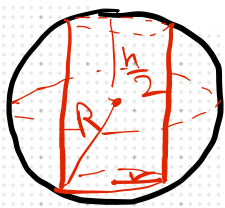
$$\Delta = 0 \rightarrow 4a^2 - 32a + 64 - 4a^2 = 0$$

$$64 = 32a \rightarrow a = 2$$

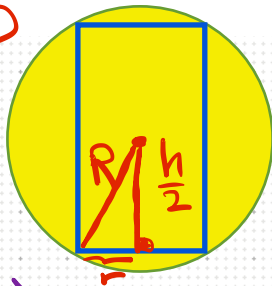


۱۳- درون کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای با بیشترین حجم ممکن را محاط کرده‌ایم. اگر ارتفاع استوانه برابر ۴ باشد، R کدام است؟

3D



2D



$$R^2 = \frac{h^2}{4} + r^2 \rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

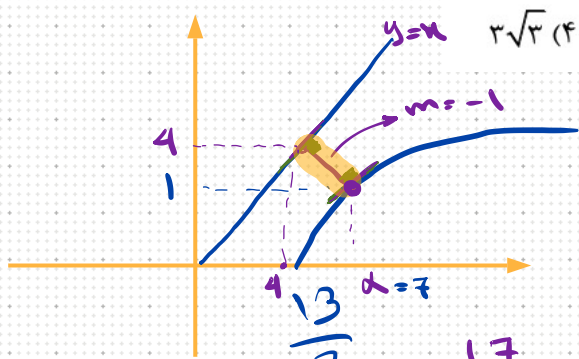
$$V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h$$

$$V = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right)$$

$$V' = \pi \left(R^2 - \frac{3}{4} h^2 \right) = 0$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{3}{4} h^2 \rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2} h, \quad h=4 \rightarrow R=2\sqrt{3}$$

۱۴- کمترین فاصله نقاط منحنی $y = \sqrt{2x-13}$ از نیمساز ناحیه اول چقدر است؟



$$f'(x) = 1 \rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2x-13}} = 1 \rightarrow \sqrt{2x-13} = 1 \rightarrow x=7$$

$$y = -x + b$$

$$\begin{array}{l} 7 \\ 1 \end{array} \rightarrow 1 = -7 + b \rightarrow b=8$$

$$\begin{array}{l} y=8-x=x \\ x=4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 7 & 4 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

۱۵- تابع $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2}$ در بازه $(a,1)$ اکیداً یکنوا است. حداقل مقدار a و نوع یکنوایی چگونه است؟

$a = -2$ (۴) صعودی ✓

$a = -1$ (۳) نزولی ✗

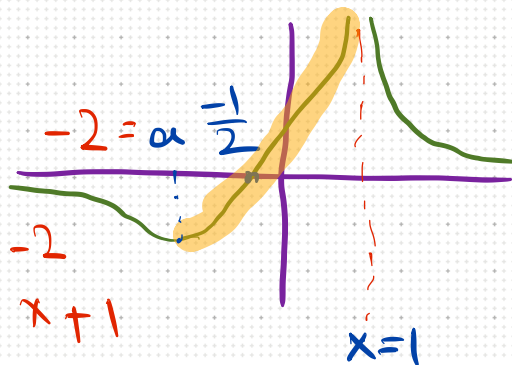
$a = -2$ (۲) نزولی ✗

$a = -1$ (۱) صعودی ✗

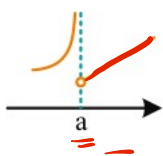
$$\sqrt{3^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x+1)}{(x-1)^4} = 0$$

$$2(x-1)^2 = 2(x-1)(2x+1) \rightarrow x-1 = 2x+1 \rightarrow x = -2$$



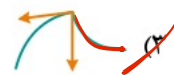
۱۶- نمودار مشتق تابع پیوسته f به صورت مقابل است. نمودار f در همسایگی $x=a$ چگونه است؟



$f' > 0 \rightarrow$ صعودی (۲) ✓

$f' \rightarrow$ صعودی

$f'' > 0 \rightarrow$ تقعر f رو به بالا است



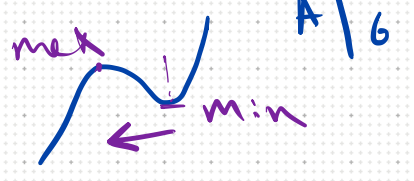
نقطه $A(2, |a|)$ نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b$ است. مقدار \max نسبی تابع $f(x)$ کدام است؟

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9 = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x + 2a = 0 \rightarrow x = -\frac{a}{3} = 2 \rightarrow a = -6$$

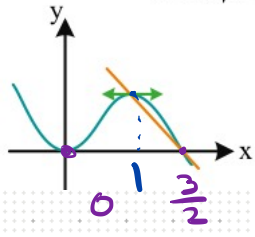
$$f(2) = 6 \rightarrow 8 + 4a + 18 + b = 6 \rightarrow -2a - 20$$

$$\frac{4a + b = -20}{-2a} \rightarrow b = 4 \rightarrow f(1) = 1 + a + 9 + b = 10 + 4 - 6 = 8$$



در شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx$ و خط $x + y = 3$ رسم شده است. مقدار b کدام است؟

$f(1)$
↓
Max



$$-\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \rightarrow b = -1.5a$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx = 0$$

$$x=0 \rightarrow x = -\frac{2b}{3a}$$

$$\frac{3a}{3} = 1$$

$$f(1) = a + b = 1$$

$$-\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = -2$$

$$b = +3$$

$$C = 0$$

$$f(x) = x^2(ax + b)$$

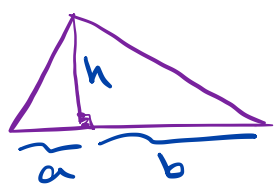
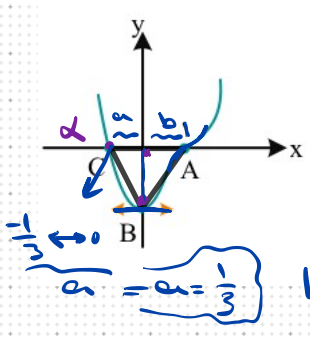
تابع $f(x) = |x|(x^2 - 4x + 5)$ در بازه (α, β) صعودی و دارای تقعر رو به پایین است. حداکثر $\beta - \alpha$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 5x & x > 0 \\ -(x^3 - 4x^2 + 5x) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8x + 5 & x > 0 \\ -(3x^2 - 8x + 5) & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 8 & x > 0 \\ 8 - 6x & x < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع درجه چهارم f به صورت مقابل است. اگر مثلث ABC در رأس B قائمه باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟



$$h^2 = ab$$

$$f(0) = h, b = 1$$

$$f^2(0) = a$$

$$f(0) = -\sqrt{a}$$

$$f(0) = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$K(x-1)^3(x-\alpha) = f(x)$$

$$f'(0) = 0$$

$$K(3(x-1)^2(x-\alpha) + (x-1)^3)$$

$$K(3(-\alpha) - 1) = 0$$

$$-3\alpha = 1 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$