۱- تابع f خطی است به‌طوری که $f(2x+1)=2f(x)+1$ است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) نمی‌توان مشخص کرد.

$f(x)=ax+a-1$

$f(x)=ax+b$

$f(2x+1)=2ax+a+b$

$2f(x)+1=2ax+2b+1$

$\rightarrow a=b+1$

$\rightarrow b=a-1$

$f(x)=a(x+1)-1$

$f(-1)=a(-1+1)-1=-1$

۲- نمودار تابع $f(x)=2x^2-3x+2\sin x$ در یک همسایگی $x=0$ کدام است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

$f'(x)=4x-3+2\cos x$

$f'(0)=0-3+2=-1<0$

$f''(x)=4-2\sin x$

$f''(0)=4-2=2>0$ ∪

۳- قدرنسبت دنبالهٔ هندسی a_n، سه برابر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی b_n است. اگر $a_1.b_{10}=3^{-8}$ باشد، حاصل عبارت $a_1b_{19}+a_2b_{18}+\ldots+a_{19}b_1$ تقریباً کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۴/۵ ۳) ۱۰/۵ ۴) ۱۳/۵

$q_a=3q_b$

$a_1q_a^{\,9}\;b_1q_b^{\,9}=3^{-8}$

$3^9a_1q_b^{\,9}\times b_1q_b^{\,9}=3^9a_1b_1q_b^{\,18}=3^{-8}$

$\rightarrow a_1b_1q_b^{18}=3^{-17}$

$S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-3^{19}}{1-3}=\frac{3^{19}-1}{2}$

$a_1b_1q_b^{18}+3a_1b_1q_b^{18}+\ldots$

$a_1b_1q_b^{18}(1+3+9+\ldots+3^{18})$

$3^{-17}\times\frac{3^{19}-1}{2}=\frac{3^2-3^{-17}}{2}$ (صفر)

$\frac{9}{2}=4.5$

۴- اگر α، β و ۱ جواب‌های متمایز معادلهٔ $2x^3-5ax^2-ax+4=0$ باشند، جواب‌های کدام معادله $\frac{1}{\alpha^2-2}$ و $\frac{1}{\beta^2-2}$ است؟

۱) $18x^2+9x-2=0$ ۲) $18x^2+9x-4=0$ ۳) $18x^2-9x-4=0$ ۴) $18x^2-9x-2=0$

$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$

$\alpha\beta=-2$

$S=\frac{1}{\alpha^2-2}+\frac{1}{\beta^2-2}=\frac{-1}{2}$ ، $P=\frac{-2}{9}$

$x^2-Sx+P=0$

$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{9}=0\xrightarrow{\times 18}18x^2+9x-4=0$

۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{|x^2-kx|-k}$ به صورت $\mathbb{R}-\{a,b,c\}$ است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

$|x^2-kx|=k\geq 0$

$|x(x-k)|=k$

$|x^2-4x|=4$

$x^2-4x=\pm 4$

$x^2-4x-4=0\rightarrow a+b=+4$

$x^2-4x+4=0\rightarrow x=2=c$

$\rightarrow \frac{k}{2}(\frac{k}{2}-k)=\frac{-k^2}{4}=-k\rightarrow k^2-4k=0$

$k=0$! (4)

۶- نقطهٔ A روی نیمساز ناحیهٔ اول قرار دارد به‌طوری که مجموع فواصل A از نقاط $B(2,1)$ و $C(-2,5)$ برابر با ۱۲ است. حاصل‌ضرب طول و عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴ ۳) ۲۵ ۴) ۹

$y=x$

$|\alpha\;\alpha|$

$\alpha>0$

$\alpha^2=?$

$AB=\sqrt{(\alpha-2)^2+(\alpha-1)^2}$

$AC=\sqrt{(\alpha+2)^2+(\alpha-5)^2}$

$AB+AC=12$

۷- اگر $f(x)=\sqrt{4-x}-2$، $g(x)=(f^{-1}of)(x)$ و $h(x)=(fof^{-1})(x^2)$ باشد، نمودار تابع $g+h$ کدام است؟

$(h+g)(x)=x^2+x$

$h(x)=x^2$

$g(x)=x$

$D_g=D_f=(-\infty,4]$

$x\in D_{x^2}\rightarrow\mathbb{R}$

$x^2\in D_{f^{-1}}=R_f\rightarrow[-2,+\infty)$

$D_g\cap D_h=D_{g+h}$

$[-2,4]$

۱) ۲) ۳) ۴)

۸- اگر $f(x)=[x-\frac{۳}{۴}]+[x+\frac{۱}{۴}]$ و $g(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ باشد، برد تابع gof کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\{۰,\sqrt{۸}\}$ ۲) $\{۰,\sqrt{۸},۲\}$ ۳) $\{۰,۲\}$ ۴) $\{۰,۱,\sqrt{۲}\}$

$R_{gof}=\{R_g \mid D_g=R_f\}$

$f(x)=[x+\frac{۱}{۴}]\times۲-۱ = ۲[x+\frac{۱}{۴}]-۱$

$D_{gof}=\{D_f \mid f\in D_g\} \to -۳\le f\le ۳$

$\mathbb{R} \to [\frac{-۵}{۴},\frac{۱۱}{۴})$

$[\frac{-۵}{۴},\frac{-۱}{۴}) \to -۵$, $[\frac{۷}{۴},\frac{۱۱}{۴}) \to ۱$, $y=x$

$[\frac{-۱}{۴},\frac{۳}{۴}) \to -۳$, $y=۰$

$[\frac{۳}{۴},\frac{۷}{۴}) \to -۱ \to y=\sqrt{۸}$

۹- نمودار تابع $f(x)=۲x+\log_۲|x|$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و در نهایت نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. نمودار نهایی، نمودار تابع f را در نقطه‌ای با کدام عرض منفی قطع می‌کند؟

۱) $\log_۲(\sqrt{۲}-۱)-\sqrt{۲}$ ۲) $\log_۲(\sqrt{۲}+۱)-\sqrt{۲}$ ۳) $\log_۲(\frac{\sqrt{۲}+۱}{۴})$ ۴) $\log_۲(\frac{\sqrt{۲}-۱}{۴})$

$f(0)=0$

$f(\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲})=۱+\sqrt{۲}+y_۲^{(\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲})}$

$y_۲^{\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}}=x \to y_۲^{۱+\sqrt{۲}}=x^۲$

$y_۲^{۱+\sqrt{۲}}+\sqrt{۲}$

$f(\frac{۱-\sqrt{۲}}{۲})=y_۲^{\sqrt{۲}-۱}-\sqrt{۲}$

$= f(x)$

$y_۲^{|x|}+y_۲^{|۱-x|}=-۲$

$\to |x||۱-x|=\frac{۱}{۴}$

$x=\frac{۱}{۲}$

$x^۲-x-\frac{۱}{۴}=۰$

$x=\frac{۱\pm\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰- تابع $f(x)=(\sqrt[۳]{\sqrt{۵۰}+۱})^x-(\sqrt[۳]{\sqrt{۵۰}-۱})^x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.
۲) روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.
۳) روی $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی و روی $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی است.
۴) روی $[۰,+\infty)$ اکیداً نزولی و روی $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی است.

$f(x)=(\frac{\sqrt[۳]{\sqrt{۵۰}+۱}}{۲})^x-(\frac{\sqrt[۳]{\sqrt{۵۰}-۱}}{۲})^x$

a^x , $a>۱ \to$ اصلی , $۰<a<۱ \to$ عکس

عکس − اصلی $\equiv$ اصلی

$x-(-x)=۲x$

۱۱- اگر $۱۶\sin\alpha\cos^۲\alpha=۱+۴\sin\alpha$ باشد، مقدار $\sin۳\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

$۱۶\sin\alpha(۱-\sin^۲\alpha)=۱+۴\sin\alpha \to ۱۶\sin^۳\alpha-۱۲\sin\alpha+۱=۰$

$\sin۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha$

$-۴(۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha)=-۱$

$\to -۴\sin۳\alpha=-۱ \to \sin۳\alpha=\frac{۱}{۴}$

۱۲- معادلهٔ $۲\sin^۴x+۱=۳\cos^۲(۲x)$ در بازهٔ $(a,۲\pi)$ دارای ۴ جواب است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۱۷\pi}{۲۰}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$

$\cos۲x=۱-۲\sin^۲x$

$\cos^۲۲x=(۱-۲\sin^۲x)^۲=۱+۴\sin^۴x-۴\sin^۲x$

$۲\sin^۴x+۱=۳+۱۲\sin^۴x-۱۲\sin^۲x$

$\to ۵\sin^۴x-۶\sin^۲x+۱=۰$

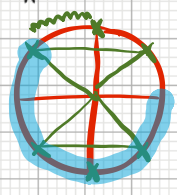
$\sin^۲x=۱$

$\sin^۲x=\frac{۱}{۵}$

$\sin x=\pm۱$

$\sin x=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

$a>\frac{\pi}{۲}$



۱۳- اگر $\lim_{x\to۳}\left(\frac{x^۲-۳x}{|x-۳|}+a[\frac{۶}{x}]\right)=\frac{a^۲-۳a}{۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) -۶

$\lim_{x\to۳^+}\left(\frac{x^۲-۳x}{x-۳}+a\right)=\frac{a^۲-۳a}{۲}$

$x(x-۳)$

$=۳+a \to a^۲-۵a-۶=۰$

$a=-۱$

$a=۶$

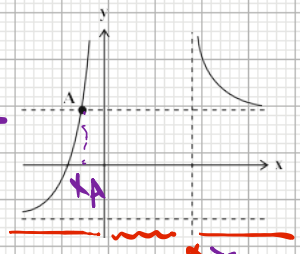
$\lim_{x\to۳^-}\left(\frac{-x(x-۳)}{۳-x}+۲a\right)=-۳+۲a=\frac{a^۲-۳a}{۲}$

$\to a^۲-۷a+۶=۰$

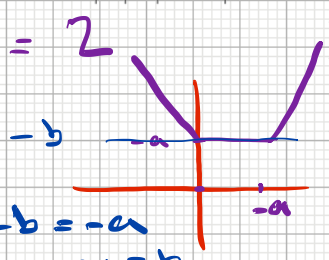
$a=۱$

$a=۶$

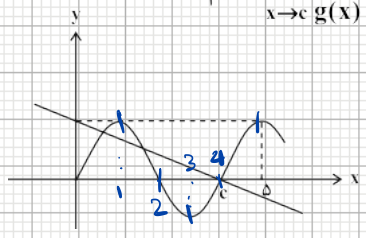
۱۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{۴x+۱۶}{|x|+|x+a|+b}$ در شکل زیر رسم شده است. طول نقطهٔ A کدام است؟



۱) -۴
۲) -۳
۲) -۲
۴) -۱



۱۵- نمودار توابع $f(x)=a\sin(b\pi x)$ و $g(x)=-\frac{x}{a}+\frac{۱}{b}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟



۱) $-\pi$
۲) -۲π
۳) -۳π
۴) -۴π

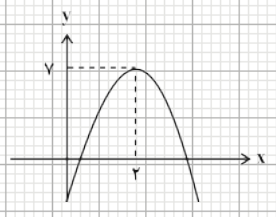
۱۶- برای تابع چندجمله‌ای f داریم: $f'(x)f''(x)=۶۴x-۲۴$. کمترین مقدار ممکن برای $f'(۳)$ کدام است؟

۱) -۲۴
۲) -۱۳
۳) -۱۰
۴) -۲۱

۱۷- مشتق راست تابع $f(x)=|۲x^۲+ax-b|$ در $x=b$ از مشتق چپ آن در همین نقطه، ۱۰ واحد بیشتر است. حاصل $a+b$ کدام است؟ $(b>۰)$

۱) ۵
۲) -۵
۳) ۱
۴) -۱

۱۸- تابع چندجمله‌ای درجه سوم f با عرض از مبدأ ۸ مفروض است، به‌طوری که $f(۱)=۱$. اگر نمودار تابع f' مطابق شکل زیر باشد، عرض نقطه عطف نمودار تابع f کدام است؟



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۵
۴) ۷

۳۰- اگر گزارهٔ $[(p\vee q)\Rightarrow(\sim p\wedge q)]\Rightarrow(p\vee q)$ نادرست باشد، آن‌گاه ارزش $p\Rightarrow q$ با کدام گزاره متفاوت است؟

۱) $q\Rightarrow p$
۲) $\sim q\Rightarrow\sim p$
۳) $\sim q\Rightarrow p$
۴) $q\Rightarrow\sim p$

$A-B = A \cap B'$

۳۱- برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B و C، اگر $[(A\cap(B'\cap C'))]\cup[A-(B-C)'] = A$ شود و تعداد اعضای هر یک از دو مجموعهٔ A و C برابر ۴ عضو باشد، $A\cup C$ چند عضو دارد؟

$n(A\cup C) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

۴ (۱ ۵ (۲ ۶ (۳ ۸ (۴

$(A\cap(B'\cap C'))\cup(A\cap(B\cap C')) = A\cap((C'\cap B')\cup(C'\cap B))$

$A\cap(C'\cap(B'\cup B)) = A\cap C' = A-C = A \rightarrow A\cap C = \emptyset$

۳۲- در کیسه‌ای سه مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۳، سه مهرهٔ سیاه با شماره‌های ۱ تا ۳ و دو مهرهٔ سبز با شماره‌های ۱ و ۲ وجود دارد. دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد دو مهرهٔ خارج شده برابر ۴ است، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ می‌باشند؟

W_1, W_2, W_3
B_1, B_2, B_3
G_1, G_2

$4 = 1+3 = 2+2$

$\binom{3}{1}\times\binom{2}{1} = 6$

$\binom{3}{2} = 3$

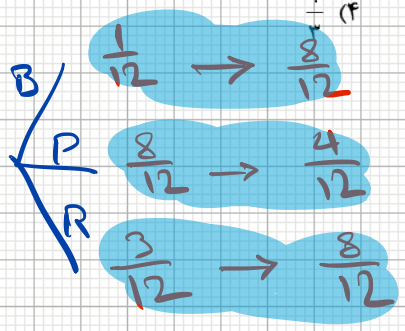
$n(S) = 9$

$n(A) = 2$

$P(A) = \frac{2}{9}$

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۳۳- ظرفی شامل ۱ مهرهٔ آبی، ۸ مهرهٔ بنفش و ۳ مهرهٔ قرمز است. به‌طور پی‌درپی و با جای‌گذاری ۴ مهره از این ظرف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم دومین و سومین مهره بنفش هستند. با کدام احتمال ۳ مهره از مهره‌های انتخاب شده بنفش هستند؟



$\frac{8}{144} + \frac{32}{144} + \frac{24}{144} = \frac{64}{144}$

$= \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۴- بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه‌ای با انحراف معیار ۱/۶۵، براساس یک نمونه به صورت $[4/4, 5/8]$ به دست آمده است. کدام گزینه مجموع اعضای این نمونه را نشان می‌دهد؟

$\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 5.4 - 4.8 = 0.6$

$4\times1.65 = 4 + 2.4 + 0.2 = 6.6$

$\frac{6.6}{\sqrt{n}} = 0.6 \rightarrow \sqrt{n} = 11$

$n = 121$

$\bar{X} = \frac{5.4+4.8}{2} = 5.1 = \frac{\sum x_i}{n}$

$\sum x_i = 121\times5.1 = 617.1$

۱) ۶۲۹/۲ ۲) ۵۶۶/۱ ۳) ۶۱۷/۱ ۴) ۵۷۱/۲

۳۵- اگر مقدار x به گونه‌ای باشد که به ازای آن هیچ عدد پنج رقمی به صورت ۱۹yx۷ بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشد، کدام عدد بر ۴ بخش‌پذیر است؟

$0 \le x, y < 10$

$19yx7 \equiv 0 \pmod{11}$

$8+y-9-x = -1+y-x \equiv 0 \pmod{11}$

$\rightarrow x \equiv y-1 \pmod{11}$

y	x
0	10
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8

$x = 0,1,2,\ldots,8$

$x = 9$

۱) ۳x۸ ۲) ۲۸x ۳) ۵x۶ ۴) ۷۶x

۳۶- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، عدد $3^n + 72$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۸ ✓ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

$3^n + 72 \overset{73}{\equiv} 0$

$3^n \overset{73}{\equiv} 1$

$3^{12k} \overset{73}{\equiv} 1 \rightarrow n = 12k$

$n = 12$

$n = 96$

$3^4 \overset{73}{\equiv} 81 \equiv 8 \rightarrow 3^4 \times 9 \equiv 9 \times 8 \equiv 72 \equiv -1$

$3^6 \overset{73}{\equiv} -1 \Rightarrow 3^{12} \overset{73}{\equiv} 1$

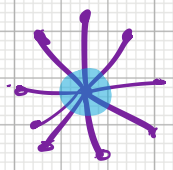
$\frac{96-12}{12} + 1 = 8$

۳۷- اختلاف میان حداکثر و حداقل عدد احاطه‌گری گراف‌های همبند مرتبهٔ ۱۰ که کمترین اندازهٔ ممکن را دارند، کدام است؟

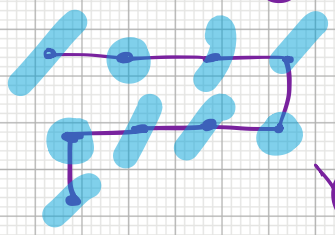
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ✓ ۴) ۱

$P = 10$

$q = 9$



$\gamma = 1$



$\gamma = 3$

۳۸- در گراف G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$، اگر $\sum_{v \in V} |N_G[v]| = 58$ باشد، چند گراف متفاوت برای $\bar{G}$ می‌توان رسم کرد که در آن $\Delta = 3$ باشد؟

۱) ۲۸۰ ✓ ۲) ۱۶۸ ۳) ۱۲۸ ۴) ۲۴۰

$P = 8$

$\binom{8}{1} \times \binom{7}{3} = 8 \times 35 = 240 + 40 = 280$

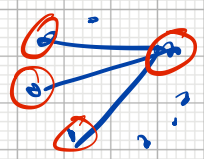
$\sum |N_G(v)| = 24$

$\sum |N_G[v]| = 24 + P \quad q = 25$

$q = 25$

$P = 8 \rightarrow q_{max} = 28$

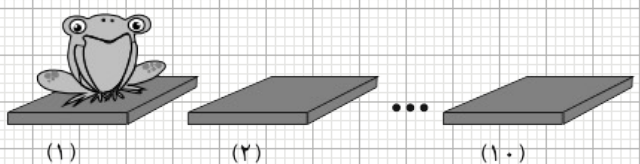
$4 + 3$



$K_8 - 3$

۳۹- مطابق شکل، یک قورباغه روی خانهٔ ۱ از ۱۰ خانه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ قرار دارد. به چند طریق، این قورباغه می‌تواند با چهار پرش خود را به خانهٔ ۱۰ برساند؟ (در هر پرش، قورباغه به اندازهٔ حداقل یک خانه به سمت راست می‌پرد.)

۱) ۸۴ ۲) ۵۶ ✓ ۳) ۳۵ ۴) ۷۰



$a \rightarrow$ پرش اول

$b \rightarrow$ پرش دوم

$d \rightarrow$ پرش چهارم

$a+b+c+d = 9 \rightarrow \binom{n-1}{k-1}$ $a,b,c,d \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \binom{9-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$

۴۰- چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که نسبت به ۲۰ اول هستند؟

۱) ۵۴۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۳۶۰ ✓ ۴) ۲۷۰

$20 = 2^2 \times 5^1 \rightarrow 2, 5$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$a = 2k$ | $a = 5k$

$\frac{990 - 100}{10} + 1 = 90$

$\frac{995 - 100}{5} = \frac{895}{5} = 179$

2 → 450, 5 → 180, 10 → 90

$450 + 180 - 90 = 540$

$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 900 - 540 = 360$