

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = 2n(n+3)$ به دست می آید. مجموع

پنج جمله دوم این دنباله چند برابر جمله دوم آن است؟

۹ (۲) ۴ (۱)
۱۵ (۴) ۱۰ (۳)

$$\frac{S_{10}}{S_5}$$

$$\frac{S_{10} - S_5}{S_2 - S_1}$$

$$S_1 = a_1$$

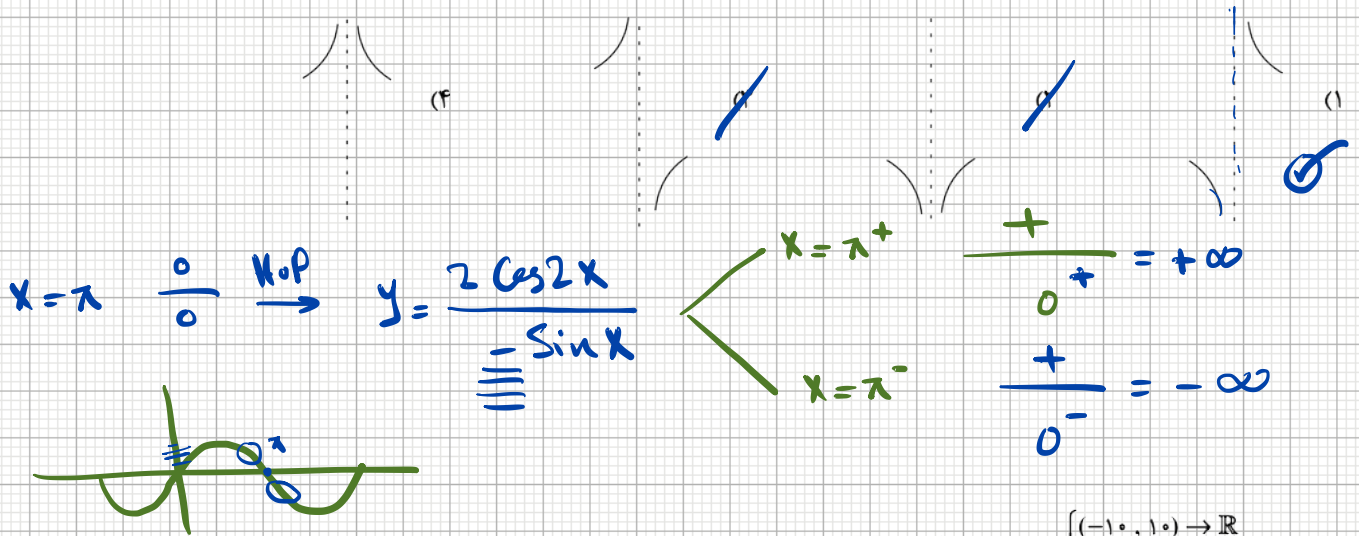
$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$a_2 = S_2 - S_1$$

$$\frac{S_{10} - S_5}{S_2 - S_1} = \frac{20(13) - 10(8)}{4(5) - 2(4)} = \frac{5(13) - 10(2)}{5 - 2}$$

$$= \frac{65 - 20}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

نمودار تابع $y = \frac{\sin 2x}{1 + \cos x}$ در همسایگی $x = \pi$ کدام است؟



چند صفر دارد؟ (| | . نماد جزء صحیح است.)

۱۹ (۴)

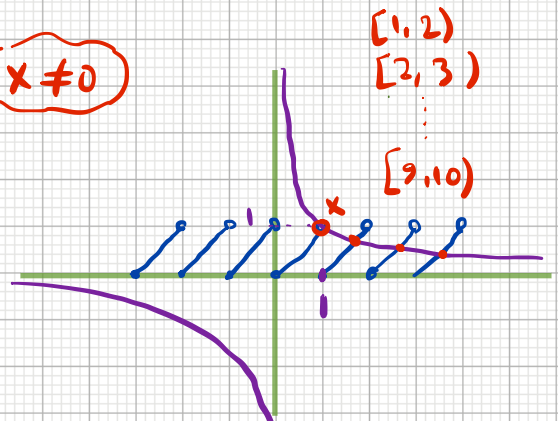
۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x - \lfloor x \rfloor) = 1, \quad (x \neq 0)$$

$$x - \lfloor x \rfloor = \frac{1}{x}$$



$$x=0 \rightarrow 2(\sqrt{1}-1) = 0$$

$$x=3 \rightarrow 2(\sqrt{4}-1) = 2$$

مجموع عرض نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y = 2(\sqrt{x+1}-1)$ و $y = x^2 - \frac{7}{3}x$ کدام است؟

۲ (۲) ۳ (۱)

$$x^2 - \frac{7}{3}x = 2\sqrt{x+1} - 2$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 7x = 6\sqrt{x+1} - 6$$

$$3x^2 - 7x - 6\sqrt{x+1} = -6$$

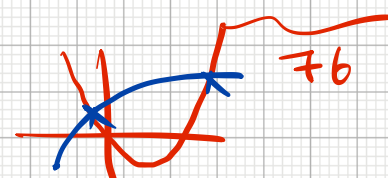
چند جمله رادیکالی صحیح

$$x = -1 \rightarrow 3 + 7 - 0 = 10 \quad \times$$

$$x = 0 \rightarrow 0 - 0 - 6 = -6 \quad \checkmark$$

$$x = 3 \rightarrow 27 - 21 - 12 = -6 \quad \checkmark$$

$$x = 8 \rightarrow 192 - 58 - 18 = 116 \quad \times$$



۵- تابع $f(x) = a \times b^x$ مفروض است. اگر $f(2) = 3$ و $f^{-1}(24) = 5$ باشد، $f(6)$ کدام است؟

۲۲ (۴)

۵۴ (۳)

۴۸ (۲)

۳۶ (۱)

$f(5) = 24$

$f(x) = \frac{3}{4}(2^x)$
 $= 3(2^{x-2})$

$3 = ab^2 \rightarrow a = \frac{3}{4}$

$24 = ab^5$

$\Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{b^3} \Rightarrow \underline{\underline{b=2}}$

$f(6) = 3 \times 2^4 = \underline{\underline{48}}$

$\log_3^3 = \frac{1}{2} \log_3^3 = \frac{1}{2}$

۶- اگر $x = \alpha$ جواب بزرگ تر معادله $\log_3(x^2+2) - 1 = \log_3 x$ باشد، حاصل $\log_{\alpha-1}(\alpha^2-1)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

صفر (۱)

$\log_3(x^2+2) - \log_3 x = 1$

$\log_b^a = c \Leftrightarrow b^c = a$

$3^1 = 3 = \frac{x^2+2}{x}$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

۷- تابع اکیداً نزولی f مفروض است. اگر $g(x) = \sqrt[3]{x}$ باشد، روی کدام بازه نمودار تابع $h(x) = (f \circ g)(\tan x)$ پایین تر از خط $y = f(1)$ است؟

$(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ (۴)

$(\frac{\pi}{4}, \pi)$ (۳)

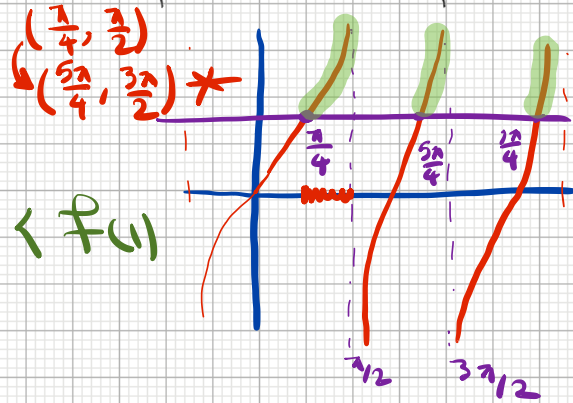
$(0, \frac{\pi}{4})$ (۲)

$(\pi, \frac{5\pi}{4})$ (۱)

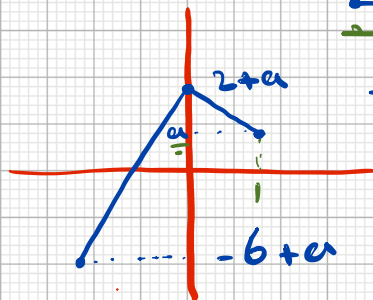
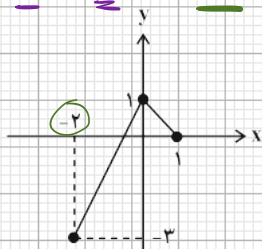
$h(x) = f(g(\tan x)) = f(\sqrt[3]{\tan x})$

$h(x) < f(1) \rightarrow f(\sqrt[3]{\tan x}) < f(1)$

$\sqrt[3]{\tan x} > 1 \rightarrow \tan x > 1$



۸- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. به ازای کدام مقدار a اشتراک دامنه و برد تابع $a > 0$: $g(x) = 2f(ax+1) + a$ تک عضوی است؟

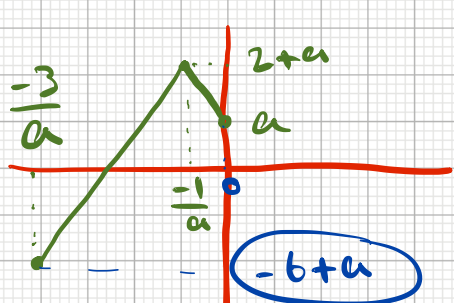


$I \begin{cases} -6+a=0 \\ \rightarrow a=6 \end{cases}$
 $II \begin{cases} \frac{-3}{a} = 2+a \\ \rightarrow a^2 + 2a + 3 = 0 \\ \Delta = 4 - 12 < 0 \end{cases}$

$R_g = [-6+a, 2+a]$

$D_g = [\frac{-3}{a}, 0]$

$g(x)$



$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_f\}$$

تابع $f(x) = 4 - \sqrt{x-2}$ مفروض است. برد تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$f \circ f(x) = 4 - \sqrt{(4 - \sqrt{x-2}) - 2} = 4 - \sqrt{2 - \sqrt{x-2}}$$

$$0 \leq \sqrt{2 - \sqrt{x-2}} \leq \sqrt{2}$$

$$4 - \sqrt{2} \leq f \circ f(x) \leq 4$$

$$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$D_{f \circ f} = [2, 6]$$

$$2 - \sqrt{x-2} \geq 0 \rightarrow 2 \geq \sqrt{x-2}$$

$$2 \leq x \leq 6 \rightarrow 0 \leq \sqrt{x-2} \leq 2$$

$$R_{f \circ f} = [4 - \sqrt{2}, 4]$$

$$4 \geq x-2 \rightarrow x \leq 6$$

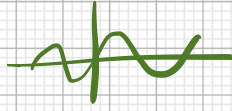
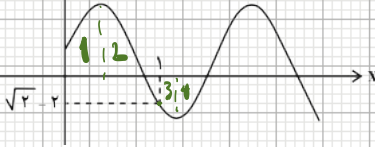
$$0 \leq x-2 \leq 4 \rightarrow 0 \leq 2 - \sqrt{x-2} \leq 2$$

$$R_{f \circ f} = [2.6, 4]$$

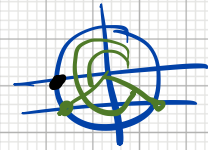
بخشی از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2}(2 \sin k\pi x + 1)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f(\frac{38}{15})$ کدام است؟

$$\sin \frac{12\pi}{6} = \sin 3\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$-\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$



$$k > 0$$



- (1) صفر
- (2) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$
- (3) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$
- (4) $2\sqrt{2}$

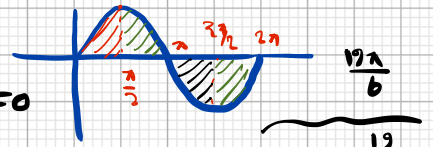
$$f(1) = \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}(2 \sin k\pi + 1)$$

$$1 - \sqrt{2} = 2 \sin k\pi + 1$$

$$\sin k\pi = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{5}{4} \\ k &= \frac{7}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$= 2\sqrt{2}(\frac{1}{2}) + \sqrt{2} = 0$$



$$f(\frac{38}{15}) = 2\sqrt{2} \sin(\frac{5\pi}{4} \times \frac{38}{15}) + \sqrt{2}$$

مجموع جواب‌های معادله $\sin^2 2x - 2 \sin^2 x = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, \frac{3\pi}{2}]$ کدام است؟

$$\frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

$$\frac{7\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{13\pi}{6} \quad (3)$$

$$\frac{5\pi}{6} \quad (4)$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\pm \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$$

$$\sin^2 2x + \cos 2x - 1 = \frac{1}{4}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$1 - \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = \frac{1}{4}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{6k \pm 1}{6} \pi$$

$$\frac{1+5+7}{6} \pi$$

$$\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{4} = 0 = (\cos 2x - \frac{1}{2})^2$$

$$\frac{13\pi}{6}$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1}}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow (1+u)^n \sim 1+nu$$

$$\sqrt[3]{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2) - (1 - \frac{1}{3}x)}{(1+x) - (1 - \frac{1}{3}x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x}{x + \frac{1}{3}x} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} ax + [2x] & ; x < 0 \\ x-1 & ; x = 0 \\ x^2 + 2x + b & ; x > 0 \end{cases}$ مشتق پذیر است. حاصل ab کدام است؟ (|) . نماد جزء صحیح است.

۱ (۲) صفر (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۲ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۵ (۱)

$$f(0) = f(0^+) = f(0^-) = b = b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax-1}{x-1} = +1 \rightarrow b=1$$

$$f'_+(0) = f'_-(0) = 2 \quad \frac{ax-1}{x-1} \rightarrow \frac{-a+1}{(x-1)^2} = \frac{1-a}{(x-1)^2}$$

$$2x+2 \Big|_{x=0} \quad (2)$$

$$1-a=2$$

$$a=-1$$

$$\left. \begin{matrix} a=-1 \\ b=+1 \end{matrix} \right\} -1$$

۱۴- اگر $x \geq 0$; $y+x^3 - 2x\sqrt{xy} = 0$ باشد، مقدار y'' به ازای $x=4$ کدام است؟

۳۶ (۴)

۱۲ (۳)

۴۸ (۲)

۲۴ (۱)

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x^3})^2 = 0 \rightarrow y = x^3$$

$$y''(4) = 24$$

$$(y+x^3)^2 = 4x^3y$$

$$x^6 + y^2 + 2x^3y = 4x^3y$$

$$\rightarrow x^6 - 2x^3y + y^2 = 0 = (x^3 - y)^2$$

$$x^3 = y \rightarrow y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2 \rightarrow y'' = 6x$$

۱۵- عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = 2x \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}x^2$ در $x=3$ کدام است؟

-۲۱ (۴)

۹ (۳)

۱۷ (۲)

۵۱ (۱)

$$f(3) = 6 \sin \frac{3\pi}{2} - \frac{9}{2} = -6 - 4.5 = -10.5 = \underline{\underline{-\frac{21}{2}}}$$

$$f'(x) = 2 \sin \frac{\pi x}{2} + \pi x \cos \frac{\pi x}{2} - x$$

$$x \sin \frac{\pi x}{2} \rightarrow \sin \frac{\pi x}{2} + x (\sin \frac{\pi x}{2})'$$

$$\rightarrow \cos \frac{\pi x}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$f'(3) = -2 + 0 - 3 = \underline{\underline{-5}}$$

$$y = -5x + b \rightarrow b = y + 5x = -10.5 + 15 = +4.5 = \underline{\underline{+\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{f}{g} \rightarrow \frac{f'g - g'f}{g^2} = 0 \rightarrow f'g = g'f \rightarrow \frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$$

۱۶- تابع $y = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$ روی بازه $[a, b]$ اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳) ✓

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 + 1} = \frac{3x^2}{2x} \rightarrow 2x^4 - 4x = 3x^4 + 3x^2$$

$$x^4 + 3x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^3 + 3x + 4) = 0$$

x	-1	0	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

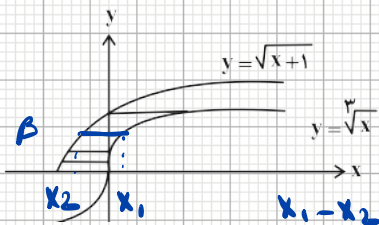
$$x = 0$$

$[-1, 0]$

$$x^3 + 3x + 4 = 0 \rightarrow x = -1$$

فقطاً یک ریشه دارد

۱۷- نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ در شکل زیر رسم شده‌اند. طول کوتاه‌ترین پاره‌خط افقی رسم شده، کدام است؟



$$y = \beta$$

$$\beta = \sqrt[3]{x_1} \rightarrow x_1 = \beta^3$$

$$\beta = \sqrt{x_2 + 1} \rightarrow x_2 = \beta^2 - 1$$

$$x_1 - x_2 = \beta^3 - \beta^2 + 1$$

$$3\beta^2 - 2\beta = 0 \rightarrow \beta = 0 \text{ or } \beta = \frac{2}{3}$$

$$\beta = 0 \rightarrow 1$$

$$\rightarrow \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + 1 = \frac{-4}{27} + 1 = \frac{23}{27}$$

۱۸- نمودار تابع $y = x^2 + \sqrt{x}$ در یک همسایگی نقطه عطفش کدام است؟



$$y = x^2 + \sqrt{x}$$

$$y' = 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = 2 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$8 = x^{-\frac{3}{2}} \rightarrow 2 = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 4 = x^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$y'' = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

