

ریاضی ۳ (نیم سال اول دوازدهم)  
 پاسخ گویی اجباری

۱۵۱- تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 6x|x| + 12x$  در کدام فاصله نزولی است؟  $\Delta = 0$

$x > 0$ :  $x^2 - 4x^2 + 12x \rightarrow f'(x) = 2x^2 - 12x + 12$  هوار صعودی  
 $x < 0$ :  $x^2 + 4x^2 + 12x \rightarrow f'(x) = 2x^2 + 12x + 12$  هوار صعودی

(۱)  $(0, 2)$   
 (۲)  $(-2, 0)$   
 (۳)  $\mathbb{R}$   
 (۴)  $\emptyset$

۱۵۲- اگر تابع  $f$  یک تابع اکیدا نزولی با دامنه  $[1, 5]$  باشد و دامنه تعریف تابع  $y = \sqrt{f(|x|) - f(2|x|) - 4}$  بازه  $[a, b]$  باشد، بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟  $[ ]$  نماد جزء صحیح است.

$f(x) > f(0) \Leftrightarrow a \leq b$   
 $f(x) > f(0) \Leftrightarrow a \leq b$   
 $[x] = 3 \rightarrow [2, 4]$   
 $[x] = 4 \rightarrow [1, 5]$   
 $D_f = x \in [2, 5]$

(۱) ۴  
 (۲)  $+\infty$   
 (۳) ۲  
 (۴) ۱

۱۵۳- اگر  $f(x) = \frac{x}{x-2}$  و  $g(x) = \frac{x}{x-2}$  باشد، برد تابع  $(g \circ f)(x)$  روی بزرگترین دامنه آن کدام است؟

$f(x) = \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{x}{x-2} < 3 \Rightarrow 0 < \frac{x}{x-2} < 3$   
 $D_f = [2, +\infty)$   
 $D_g = (-\infty, 2]$   
 $D_{g \circ f} = (2, +\infty)$

(۱)  $[2, 3)$   
 (۲)  $[2, +\infty)$   
 (۳)  $(-\infty, 2]$   
 (۴)  $(2, +\infty)$

۱۵۴- اگر  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$  و  $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$  باشد، دامنه تابع  $y = f \circ g(x)$  شامل چند عدد صحیح نمی باشد؟

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$  و  $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$   
 $D_{f \circ g} = [0, 2]$   
 $g(x) = \frac{x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow x = 5$   
 $g(x) = -1 \Rightarrow x = 3$   
 $D_{f \circ g} = [3, 5]$

(۱) ۲  
 (۲) ۳  
 (۳) ۴  
 (۴) ۵

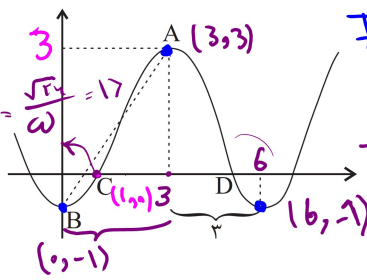
۱۵۵- ضابطه تابع وارون  $f(x) = x + 2\sqrt{x-1}$  کدام است؟

$f^{-1}(x) = x + 2\sqrt{x+2} + 3 \quad (x \geq -1)$   
 $f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 3 \quad (x \geq 0)$   
 $f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{x+2} + 3 \quad (x \geq -1)$   
 $f^{-1}(x) = x + 2\sqrt{x+2} + 3 \quad (x \geq 0)$

$f(x) = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} + 1)^2 - 2 = y$   
 $\Rightarrow y + 2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+2} = \sqrt{x} + 1 = \sqrt{x} + 1$   
 $\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y+2} - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y+2} - 1)^2 = y + 2 + 1 - 2\sqrt{y+2}$   
 $\Rightarrow f^{-1}(x) = x + 3 - 2\sqrt{x+2} \rightarrow f^{-1}$  دامنه  $f$  برد  $\Rightarrow x \geq -1$

۱۵۶- شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f(x) = -2 \cos(\frac{\pi}{a}x) + b$  را نشان می‌دهد. اگر عرض از مبدأ تابع  $f$  برابر  $-1$  باشد، نسبت  $\frac{CD}{AB}$  کدام

$\frac{CD}{AB} = \frac{\sqrt{1+10}}{\sqrt{9+14}}$



$T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = 6 \rightarrow a = 2$

$|a| = 2 \rightarrow a = 2$  است؟

(۱)  $0/6$

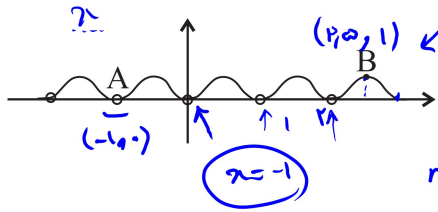
(۲)  $0/8$

(۳)  $1$

(۴)  $1/2$

$f(x) = -2 \cos(\frac{\pi}{2}x) + 1$   
 $-2 \cos(\frac{\pi}{2}x) + 1 = \dots \rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}x) = \frac{1}{2}$

۱۵۷- قسمتی از نمودار  $y = \frac{\sin^2(\pi x)}{\tan \frac{\pi x}{2} \times \cot \frac{\pi x}{2}}$  را رسم کرده‌ایم. شیب خط AB کدام است؟



$y = \sin^2(\pi x)$   
 $D_f = \mathbb{R} - \{n \in \mathbb{Z}\}$   
 $x \in \{\mathbb{R} - \mathbb{Z}\}$

$m_{AB} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1$

(۱)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $\frac{2}{5}$

(۳)  $\frac{2}{7}$

(۴)  $\frac{2}{9}$

۱۵۸- حاصل  $(1 + \sin \frac{\pi}{12})(1 + \sin \frac{5\pi}{12})(1 + \sin \frac{13\pi}{12})(1 + \sin \frac{17\pi}{12})$  کدام است؟

$(1 + \sin \frac{\pi}{12})(1 + \cos(\frac{\pi}{12}))(1 + \sin(\pi + \frac{\pi}{12}))(1 + \sin(\frac{13\pi}{12}))$

$(1 + \sin(\frac{\pi}{12}))(1 + \cos(\frac{\pi}{12}))(1 - \sin(\frac{\pi}{12}))(1 - \cos(\frac{\pi}{12}))$

$(1 - \sin^2(\frac{\pi}{12}))(1 - \cos^2(\frac{\pi}{12})) = \cos^2(\frac{\pi}{12}) \times \sin^2(\frac{\pi}{12}) = (\sin(\frac{\pi}{12}) \cos(\frac{\pi}{12}))^2$

۱۵۹- اگر  $\cos 4\alpha = \frac{17}{81}$  باشد، حاصل ضرب مقادیر ممکن برای  $\cos \alpha$  چقدر است؟

$\cos(4\alpha) = \cos(2(2\alpha)) = 2 \cos^2(2\alpha) - 1 = 2(2 \cos^2(\alpha) - 1) - 1 = 4 \cos^2(\alpha) - 4 + 2 = 4 \cos^2(\alpha) - 2$

$4 \cos^2(\alpha) - 2 = \frac{17}{81}$

$\cos^2(\alpha) = \frac{19}{81}$

$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{19}}{9}$

۱۶۰- اگر  $\alpha$  بزرگ‌ترین جواب معادله  $8 \sin^2 x + 5 \sin 2x + 1 = 0$  باشد که در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  قرار دارد، مقدار  $9 \tan \alpha - \cot \alpha$  کدام

$8 \sin^2 x + 5 \sin 2x + 1 = 0$   
 $8 \sin^2 x + 10 \sin x \cos x + 1 = 0$   
 $\frac{8 \sin^2 x}{\sin^2 x} + 10 \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 0$   
 $8 + 10 \cot x + 1 + \cot^2 x = 0$   
 $(\cot x + 1)(\cot x + 9) = 0$   
 $\cot x = -1$   
 $\tan \alpha = -\frac{1}{9}$

است؟

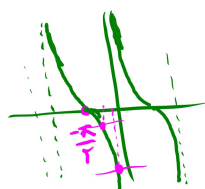
(۱)  $7$

(۲)  $\sqrt{2}$

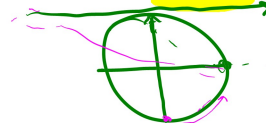
(۳)  $9$

(۴)  $10$

$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$



$\tan \alpha = -\frac{1}{9}$



161- اگر  $f(x) = \frac{ax+b}{4x+1}$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(f(x)) = 3$  باشد، مقدار  $b-a$  کدام است؟

$$f(x) = \frac{ax+b}{4x+1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{ax}{4x} = \frac{a}{4}$$

162- با فرض  $f(x) = \frac{x^2|x-1|}{x^2-12x-16}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow -2} (f \circ f)(x)$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow -2} x \left( x + \frac{-14x+b}{4x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(14+4b)x^2}{4x^2+4x+1} = \frac{14+4b}{4(-2)^2+4(-2)+1} = \frac{14+4b}{16-8+1} = \frac{14+4b}{9}$$

163- اگر  $f(x) = \frac{x^2-4x+2[x]}{x-\sqrt{3x-2}}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(2-\cos x)$  چقدر است؟

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2(x-1)}{(x-5)(x+4)} = \frac{-(-2)^2(-2-1)}{(-2-5)(-2+4)} = \frac{-4(-3)}{(-7)(2)} = \frac{12}{-14} = -\frac{6}{7}$$

164- حاصل عبارت  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{1+x^6} - \sqrt{1-x^2}}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (x+3)}{x - \sqrt{3x-2}} \times \frac{(x+\sqrt{3x-2})}{(x+\sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)(1+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2 \times 2}{-1} = 4$$

165- اگر  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b} = -\infty$  مقدار  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+x^2) \left( \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \right)}{\left( \sqrt{1+x^2} \right)^2 + \left( \sqrt{1-x^2} \right)^2} \times \left( \frac{1+x^2}{x^4+x^2} \right) = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\left( \sqrt{1+x^2} \right)^2 + \left( \sqrt{1-x^2} \right)^2} = \frac{2}{2} = 1$$

166- اگر  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b} = -\infty$  مقدار  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+2x-1} = \frac{-2+2}{4-4-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

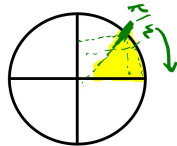
167- اگر  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b} = -\infty$  مقدار  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+2x-1} = \frac{-2+2}{4-4-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

168- اگر  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b} = -\infty$  مقدار  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+ax+b} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+2x-1} = \frac{-2+2}{4-4-1} = \frac{0}{-1} = 0$$





$\cos \alpha > \sin \alpha$   
 $n = \frac{\pi}{4}$

$\sin n < \cos n$

دفترچه سوم آزمون 16 فروردین - جمع بندی دوازدهم

$b=2$

166- اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{ax - \pi}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}$  حاصل باشد، در این صورت کدام است؟

$\frac{\sqrt{x} \sqrt{x} - b \sqrt{x}}{x} =$

$\frac{1}{\sqrt{x}} a - \frac{1}{\sqrt{x}} b \rightarrow \frac{a}{\sqrt{x}} < \frac{b}{\sqrt{x}} \rightarrow a < b$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{ax - \pi}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}} = \frac{a\frac{\pi}{4} - \pi}{\sqrt{\sin \frac{\pi}{4}} - \sqrt{\cos \frac{\pi}{4}}} = \frac{a\frac{\pi}{4} - \pi}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{a\frac{\pi}{4} - \pi}{0}$

$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - a}{(n-2)^2} = \frac{4-a}{0} = \frac{+}{0} = +\infty$

$\frac{a-a}{0} = \frac{0}{0} = \frac{+}{+} = +\infty$

$\frac{-a}{0} = \frac{-}{0} = -\infty$

- (1)  $+\infty$
- (2) صفر
- (3)  $\frac{1}{2}$
- (4)  $-\infty$

167-  $f(x)$  تابعی چند جمله‌ای از درجه دو و ضریب جمله  $x^2$  آن یک است. اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) + f(x) - 20}{x-2} = 66$  و  $f(2) \neq -6$  باشد.

$f(x) = x^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 2x + b$   
 $f(1) = 1 - 6 = -5$   
 $f'(1) = 2 + b = 4 + b$

$f'(1) + f(1) - 20 = 0 \rightarrow (2 + b) + (1 - 6) - 20 = 0$

$f(1) = 0$   
 $f'(1) = 4$

$f(x) = a + bx + c = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) + f(x) - 20}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + b + x^2 + bx + c - 20}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + (b+2)x + c - 20}{x-2}$

$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 + an + b}{n-2} = \frac{4 + 2a + b}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$

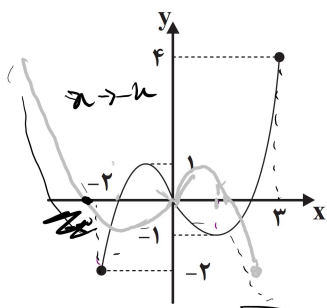
$\lim_{n \rightarrow 2^+} \frac{n^2 + an + b}{n-2} = \frac{4 + 2a + b}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \frac{4 + 2a + b}{0} = \frac{4 + 2a + b}{0}$

$f^{-1}(\sqrt{x-1})$  کدوم است؟  
 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = -1 \rightarrow f^{-1}(-1) = -1$

169- فرض کنید  $1 + f^2(x) = \sqrt{1+x^2}$  باشد. ضابطه تابع  $f^{-1}(\sqrt{x-1})$  کدوم است؟  
 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$   
 $f^{-1}(\sqrt{x-1}) = f^{-1}(\sqrt{1+x^2} - 1)$

170- نمودار تابع  $y = f(-\frac{1}{2}x + 2)$  مانند شکل زیر است. چند مقدار صحیح برای  $k$  وجود دارد تا  $k^2 - 4k + 6 = f(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$  فقط



$f(-\frac{1}{2}n + 2)$

$x \rightarrow -\frac{1}{2}n \Rightarrow f(\frac{1}{2}n + 2)$

$|f(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2})| \rightarrow$   
 برز =  $[0, 4]$

یک جواب داشته باشد؟  
 $k^2 - 4k + 6 = f(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2})$   
 $f \pm \sqrt{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$   
 بی شمار  
 هیچ  
 $k - 2 > 0 \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$\mathbb{R} \setminus f(-\frac{1}{2}n + 2) = [-2, 4]$

