



$f \circ g = \{(1,0), (-1,2), (0,1)\}$   
 $g \circ f = \{(2,3), (3,2), (0,0)\}$

۱۱۱- توابع  $f = \{(1,2), (2,0), (3,1), (0,0)\}$  و  $g = \{(1,2), (-1,1), (0,3)\}$  مفروضند. کدام گزینه درست است؟  
(۱) fog اکیداً نزولی است. (۲) fog اکیداً صعودی است. (۳) gof اکیداً نزولی است. (۴) gof غیریکنواست.

$\max = |a| + c$   
 $\min = |a| + c$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \leftarrow a \cos(\omega x) + c$  در کدام تابع دوره تناوب با اختلاف ماکزیمم و مینیمم برابر است؟

$y = \frac{\pi}{4} \cos 2x - 2$  (۴)  $y = 2\pi \sin 2x - 1$  (۳)  $y = -\pi \cos 2x + 2$  (۲)  $y = \frac{\pi}{2} \sin 2x + 1$  (۱)

۱۱۲- چند جمله‌ای  $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 1$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x - 1$  کدام است؟

$f(x) = 0 \rightarrow 1a + 6b + 3 = 0$   
 $f(-2) = 0 \rightarrow -8a + 4b - 5 = 0$

$f(x) = (x-2)(x+2) \cdot Q(x) + R(x)$   
 $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 5x - 1 = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$  (۱)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۱۱۴- مشتق تابع  $y = (\frac{3x+1}{2x+1})^7$  در  $x=2$  کدام است؟

$y' = V \left( \frac{3x+1}{2x+1} \right)^6 \cdot \left( \frac{3-2}{(2x+1)^2} \right)$

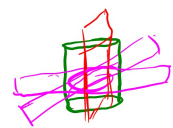
$y' = 7x \left( \frac{3}{5} \right)^6 \cdot \left( \frac{1}{5^6} \right)$   
 $\left( \frac{a+b}{c+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(c+d)^2}$

$\frac{7^7}{5^7}$  (۱)

۱۱۵- تابع  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4$  در فاصله  $(1,3)$  چند نقطه بحرانی دارد؟

$f'(x) = 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x-8) = 0 \rightarrow x = \frac{8}{3}$

۱ (۱)



۱۱۶- سطح مقطع حاصل از بر خورد یک صفحه با یک استوانه کدام شکل نمی تواند باشد؟

(۱) سهمی

(۲) بیضی

(۳) مستطیل

(۴) دایره

۱۱۷- اگر احتمال نوعی بیماری در نوزاد پسر ۰.۰۶٪ و در نوزاد دختر ۰.۰۵٪ باشد و خانواده‌ای قصد بچه دار شدن داشته باشد، با چه

$\frac{1}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{5}{10000}$

$\frac{11}{100} = \frac{58}{100} = \frac{1}{10000}$

احتمالی نوزاد آن‌ها به این بیماری مبتلا خواهد شد؟  
۰.۰۵۵٪ (۱) ۰.۰۵۲٪ (۲) ۰.۰۶۵٪ (۳) ۰.۰۶۶٪ (۴)

۱۱۸- دو تابع  $f$  و  $g$  یک به یک و وارون پذیر هستند. اگر  $f(a) = 2$  و  $gof^{-1}(2) = 3$  باشد، حاصل  $gog(a)$  کدام است؟

$(f \circ g)^{-1} = (g \circ f)^{-1}$   
 $g \circ g^{-1}(a) = a$

$gof^{-1}(2) = 3 \Rightarrow g^{-1}(2) = 3 \Rightarrow g(3) = 2$

$f(a) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$

$gog(a) = g(2) = 3$

۱۱۹- اگر  $f(x) = x^3 + ax + b$  و  $g(x) = [x-1] + [2-x]$  و  $f \circ g(x) = 3$  باشد،  $a - b$  کدام است؟

$-3$  (۴)

$3$  (۳)

$-1$  (۲)

$1$  (۱)

$g(x) = [x-1] + [2-x] = [x] - 1 + 2 + [-x] = 1 + [x] + [-x] \Rightarrow [x] + [-x] = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$f \circ g(x) = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$   
 $1 + a + b = x$

$b = 2$

$a = -1$

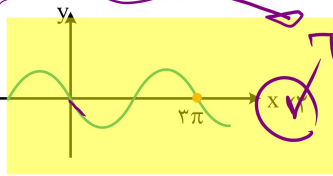
$a - b = -1 - 2 = -3$

محل انجام محاسبات

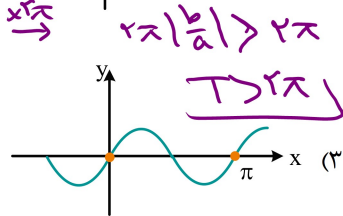
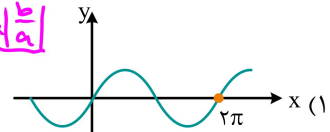
۱۲۰. تابع  $f(x) = a|x| + bx + c$  وارون پذیر است. کدام گزینه می تواند نمودار  $y = \sin \frac{a}{b} x$  باشد؟  
 اگر  $a > 0$ :  $ax + bx + c \rightarrow (a+b)x + c \rightarrow (b+a)(b-a) = b^2 - a^2 > 0 \rightarrow b^2 > a^2 \rightarrow |b| > |a|$   
 اگر  $a < 0$ :  $-ax + bx + c \rightarrow (b-a)x + c$

$\Rightarrow \frac{|b|}{|a|} > 1$

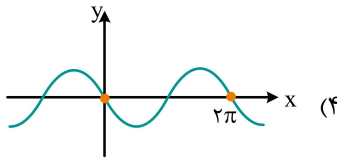
$\frac{|b|}{|a|} > 1 \Rightarrow -1 < \frac{b}{a} < 1$



$T = 2\pi = 2\pi \times \frac{1}{|a|}$   
 $\frac{|b|}{|a|} > 1 \Rightarrow 2\pi \times \frac{|b|}{|a|} > 2\pi$   
 $T > 2\pi$



$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq 2 \\ -x^2 - 2 & x < 2 \end{cases}$

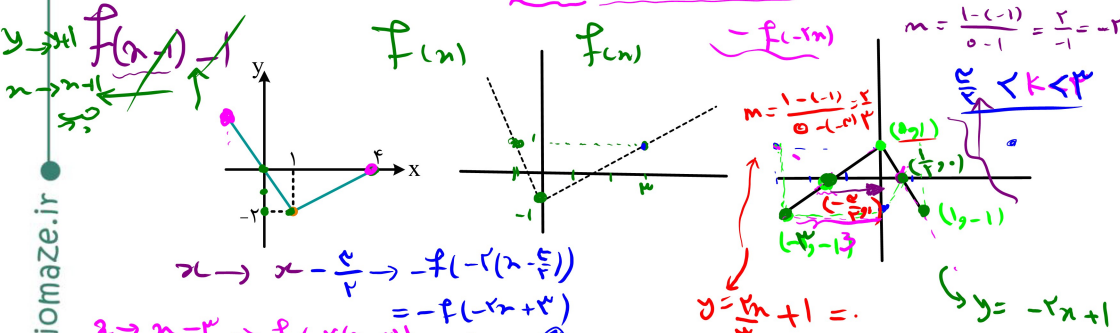


ضابطه وارون این تابع در این فاصله کدام است؟  
 $D_f = (-2, 0)$ ,  $R_f = (0, \infty)$

۱۲۱. تابع  $f(x) = (x-2)|x+2|$  در فاصله  $(a, b)$  نزولی است.

$f^{-1}(x) = -\sqrt{4-x}$  (۴)  $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}$  (۳)  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4}$  (۲)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$  (۱)

۱۲۲. نمودار تابع  $y = f(x-1) - 1$  رسم شده است. اگر تابع  $y = -f(-2x+k)$  فقط از ناحیه دوم عبور نکند، حدود  $k$  کدام است؟



$-\frac{3}{2} \leq k < 3$  ✓  
 (۲)  $-\frac{3}{2} < k < 3$   
 (۳)  $\frac{3}{4} \leq k < \frac{3}{2}$   
 (۴)  $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{2}$

$x \rightarrow x - \frac{3}{4} \rightarrow -f(-2(x - \frac{3}{4}))$   
 $= -f(-2x + \frac{3}{2})$   
 $2 \rightarrow x - \frac{3}{4} \Rightarrow f(-2(x - \frac{3}{4})) = -f(-2x + \frac{3}{2})$

نمودار تابع  $y = a \sin^2(bx) + c$  بر  $y = \cos x$  منطبق است. کدام  $a-c$  است؟  
 (۳) (۳)  $a-c = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$

۱۲۴. حاصل عبارت  $(1 - \cos \frac{\pi}{9}) \tan \frac{\pi}{9}$  کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\sin \frac{\pi}{18}$  (۲)  $\sin \frac{\pi}{9}$  (۱) ✓

$\cos^2 x = 1 - \sin^2(\frac{x}{2}) = c + a \sin^2(bx)$   
 $\begin{cases} c=1 \\ a=-2 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$   
 اینها!  $\cos^2 x = a(1 - \cos^2(bx)) + c$   
 محل انجام محاسبات

۱۲۵.  $(1 - \cos \frac{\pi}{18}) (\tan \frac{\pi}{18})$   
 $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$   
 $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$   
 $(2 \sin^2 \frac{\pi}{18}) (\tan \frac{\pi}{18}) = (2 \sin^2 \frac{\pi}{18}) (\frac{\sin \frac{\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{18}})$   
 $= 2 \sin^2 \frac{\pi}{18} \times \cos \frac{\pi}{18} = \sin^2 \frac{\pi}{9}$   
 محل انجام محاسبات  
 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{9}$   
 $\tan(\alpha) = \cot(\beta)$



۱۲۵- نمودار تابع  $y = a \tan(bx) \cos(bx) + c$  به صورت مقابل است.  $ab + c$  کدام است؟

$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{b}$

$a \times \left[ \frac{\sin(2bx)}{\cos(2bx)} \times \cos(2bx) \right] + c = \frac{a}{\cos(2bx)} + c$

$f(1) = \frac{a}{\cos(2)} + c = -4$   
 $f(2) = \frac{a}{\cos(4)} + c = -4$   
 $f(3) = \frac{a}{\cos(6)} + c = -4$

$f(0) = \frac{a}{\cos(0)} + c = 2 \Rightarrow [C=2]$

$\frac{a}{\cos(2)} + 2 = -4 \Rightarrow \frac{a}{\cos(2)} = -6 \Rightarrow a = -6 \cos(2)$

$ab + c = (-6 \cos(2)) \cdot 1 + 2 = -6 \cos(2) + 2$

۱۲۶- جواب کلی معادله  $\cot x (2 \cos x + 1) = \frac{1}{\sin x}$  کدام است؟

$\cos x (2 \cos x + 1) = 1$

$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$   
 $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

$\frac{2k\pi + \frac{\pi}{3}}{2} \cup \frac{k\pi + \pi}{2}$

۱۲۷- اگر  $b$  عددی حقیقی و  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{a - \sin x}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = b$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{a - b}{1 - \sin x}$  کدام است؟

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{a - \sin x}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = b$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{a - \sin x}}{\frac{1}{2}(1 - \cos x) - (1 - \sin x)}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{a - \sin x}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x - 1 + \sin x} = \frac{\sqrt{a - 1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a - 1}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a - 1} = b$

$\sqrt{a - 1} = \frac{b}{2} \Rightarrow a - 1 = \frac{b^2}{4} \Rightarrow a = 1 + \frac{b^2}{4}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{a - b}{1 - \sin x} = \frac{1 + \frac{b^2}{4} - b}{1 - 1} = \frac{1 - b + \frac{b^2}{4}}{0} = \frac{(1 - \frac{b}{2})^2}{0} = +\infty$

۱۲۸- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل است. اگر  $\lim_{x \rightarrow k} \frac{(-1)^x}{f(x)} = -\infty$  باشد،  $k$  کدام است؟

با توجه به نمودار،  $f(x)$  در  $x=1$  و  $x=2$  صفر می‌شود.

در  $x=1$ ،  $f(x)$  مثبت است.  $\frac{(-1)^1}{f(x)} = \frac{-1}{f(x)}$  که در صورت  $f(x) \rightarrow 0^+$  به  $-\infty$  میل می‌کند.

در  $x=2$ ،  $f(x)$  منفی است.  $\frac{(-1)^2}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}$  که در صورت  $f(x) \rightarrow 0^-$  به  $-\infty$  میل می‌کند.

بنابراین  $k=2$  است.

۱۲۹- اگر  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + dx + e}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟

با توجه به نمودار،  $f(x)$  در  $x=1$  و  $x=2$  صفر می‌شود.

در  $x=1$ ،  $f(x)$  مثبت است.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

در  $x=2$ ،  $f(x)$  منفی است.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

بنابراین  $a > 0$  است.

۱۳۱- با توجه به شکل مقابل، حاصل  $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$  کدام است؟

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$

در  $x=1$ ،  $f(1)=2$ ،  $f'(1)=2$ ،  $g(1)=0$ ،  $g'(1)=1$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 2}{0^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$

محل انجام محاسبات





آزمون الکترونیکی مرحله (۱) تکمیلی ها | ریاضی

$f(\sqrt{x^2+2x}) = f(\sqrt{x^2+2x})$   
 $f'(\sqrt{x^2+2x}) = (\sqrt{x^2+2x})' \cdot (-n-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}} \cdot (-n-1)$   
 اگر  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  حاصل  $f'(\sqrt{x^2+2x})$  به ازای  $x = -3$  کدام است؟  
 $f(\sqrt{x^2+2x}) = \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2}$   
 $f'(\sqrt{x^2+2x}) = 12+1 = 13$   
 $-1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} = -1$

۱۳۳- آهنگ متوسط تابع  $f(x) = ax^2 - 17x + 27$  در فاصله  $[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$  برابر ۳ است. آهنگ لحظه‌ای تابع  $g(x) = f(\sqrt{x^2})$  در  $x=1$

کدام است؟  $f'(x) = 2ax - 17$   
 $f'(1) = 2a - 17 = 3 \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$   
 $g(x) = f(\sqrt{x^2}) = f(x) = ax^2 - 17x + 27$   
 $g'(x) = f'(\sqrt{x^2}) \cdot (\sqrt{x^2})' = f'(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} = f'(x) \cdot \frac{x}{|x|}$   
 $g'(1) = f'(1) \cdot \frac{1}{1} = 3$

۱۳۴- نقطه  $(4, 4)$  اکستریم نسبی تابع  $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x}}$  است. نوع اکستریم و مقدار  $ab$  کدام است؟  
 $f'(x) = \frac{a\sqrt{x} - \frac{1}{2}(a+b)x^{-\frac{1}{2}}}{x}$   
 $f'(4) = 0 \Rightarrow 4a - \frac{1}{2}(a+b) \cdot 4 = 0 \Rightarrow 4a - 2(a+b) = 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b$   
 $f''(4) < 0$  (ماکزیمم)  $a = 1, b = 1 \Rightarrow ab = 1$

۱۳۵-  $x=2$  طول نقطه بحرانی تابع  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  بوده ولی اکستریم نسبی نمی باشد. کمترین مقدار این تابع کدام است؟

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$  در  $x=2$   
 $12 + 4a + b = 0$   
 $f''(x) = 6x + 2a$   
 $f''(2) = 12 + 2a > 0 \Rightarrow a > -6$   
 $f(2) = 8 + 4a + 2b$   
 $f(2) = 8 + 4a + 2(-12 - 4a) = 8 + 4a - 24 - 8a = -16 - 4a$   
 چون  $a > -6$ ، کمترین مقدار  $f(2)$  در  $a = -6$  است.  
 $f(2) = -16 - 4(-6) = -16 + 24 = 8$

۱۳۷- نقطه  $M(-\frac{1}{2}, k)$  روی بیضی به کانون‌های  $F(-1, 0)$  و  $F'(5, 0)$  و با خروج از مرکز  $6/10$  واقع است.  $k^2$  کدام است؟

بیضی:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
 کانون‌ها:  $c = 3$   
 خروج از مرکز:  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = \frac{6}{10} \Rightarrow a = 5$   
 $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$   
 معادله بیضی:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$   
 نقطه  $M(-\frac{1}{2}, k)$  روی بیضی است:  
 $\frac{(-\frac{1}{2})^2}{25} + \frac{k^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{1}{100} + \frac{k^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{k^2}{16} = \frac{99}{100} \Rightarrow k^2 = \frac{1584}{100} = \frac{396}{25}$

۱۳۸- دایره  $C$  به مرکز  $(5, -3)$  و شعاع  $R$  بر دایره  $C'$  به معادله  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$  مماس است. مجموع مقادیر  $R$  کدام است؟  
 دایره  $C'$ :  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$   
 دایره  $C$ :  $(x-5)^2 + (y+3)^2 = R^2$   
 مماس بودن:  $|5-2| + |-3-1| = R \Rightarrow 3+4 = R \Rightarrow R = 7$

۱۳۹- یک کیسه دارای ۶ مهره سبز و ۴ مهره زرد است. بدون رویت، دو مهره از کیسه خارج کرده در کیسه دیگر قرار می دهیم. حال از کیسه اول دو مهره خارج می کنیم، با کدام احتمال هر دو مهره سبز می باشند؟  
 احتمال:  $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

۱۴۰- در کلاس A، ۲ دانش آموز ریاضی و ۴ دانش آموز تجربی و در کلاس B، ۲ دانش آموز ریاضی و ۶ دانش آموز تجربی حضور دارند. ۲ نفر از کلاس A وارد کلاس B می شوند، یک دانش آموز از کلاس B انتخاب می کنیم، با چه احتمالی این دانش آموز، ریاضی است؟

احتمال:  $\frac{2}{15}$

محل انجام محاسبات

$\frac{1}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$   
 $\frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$   
 $\frac{1}{45} + \frac{1}{45} = \frac{2}{45}$