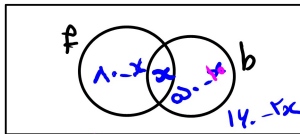


ریاضی پایه

۱۱۱- در یک مدرسه با ۲۶۰ دانش آموز، ۸۰ نفر در رشته فوتبال و ۵۰ نفر در رشته بسکتبال بازی می کنند. تعداد نفراتی که در هیچ یک از این دو رشته بازی نمی کنند، دو برابر افرادی است که فقط فوتبال بازی می کنند. در این مدرسه چند نفر فقط بسکتبال بازی می کنند؟



معادله: $100 - x + x + 50 - x + 140 - 2x = 240$
 $-3x + 290 = 240 \Rightarrow 3x = 50 \Rightarrow x = 16.6$ (Not integer, so wrong)

$1.9e = 1.9a + 1.9b$
 $\frac{1.9}{2+1} t_n$

۱۱۲- اگر $(\log_3 2x)$ ، $(\log_3 4x)$ و $(\log_3 8x)$ به ترتیب از راست به چپ جملات اول، سوم و پنجم یک دنباله هندسی غیر ثابت باشند، جمله هفدهم دنباله کدام است؟

$(1 + \frac{k}{r})(1+k) = (1 + \frac{k}{r})^r = (1 + \frac{k}{r} + k) = (1 + \frac{k}{r} + k + \frac{k}{r}) \Rightarrow 1 + \frac{k}{r} + k = 1 + \frac{k}{r} + k + \frac{k}{r}$
 $2k = 2k + k \Rightarrow k + k = 0 \Rightarrow k(k+1) = 0 \Rightarrow k = -1$
 $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 4, \dots, t_n = 2^{n-1}$
 $t_{17} = 2^{16} = 65536$

ضرب دو جمله میانی است. حال اگر مجموع دو جمله میانی برابر ۳ باشد، مجموع ارقام جمله بزرگ تر کدام است؟

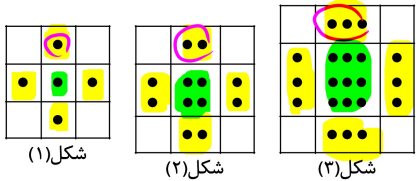
$(a-d) \quad a-d \quad a+d \quad (a+3d) \Rightarrow (a-d)(a+3d) = 1 \cdot (a-d)(a+d)$
 $a^2 - 9d^2 = 1 \cdot a^2 - 1 \cdot d^2 \Rightarrow 8d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$
 $(a-d) + (a+d) = 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

۱۱۴- بین جملات سوم و هفتم دنباله هندسی $a_n = 5(2)^{n-1}$ ، سه واسطه حسابی قرار می دهیم. مجموع این واسطه ها کدام است؟

$a_3 = \frac{5}{2}, a_7 = \frac{5}{32}$
 $\frac{5}{2} + kd = \frac{5}{32} \Rightarrow kd = \frac{5}{32} - \frac{5}{2} = \frac{5-80}{32} = \frac{-75}{32} \Rightarrow d = \frac{-75}{128}$

$3t_3 = ? = 3(t_1 + 2d) = 3(\frac{5}{2} + \frac{-75}{64}) = 3(\frac{140}{64} - \frac{75}{64}) = 3(\frac{65}{64}) = \frac{195}{64}$

۱۱۵- در الگوی شکل مقابل، تعداد نقاط شکل چندم برابر ۱۹۲ است؟



$n^2 + 4n = 192$
 $n(n+4) = 14 \times 14 \Rightarrow n = 12$

۱۱۶- خط $y = k$ نمودار سهمی $y = x^2 - 2x$ را در دو نقطه A و B قطع می کند. اگر مثلث OAB در رأس O، قائم الزاویه باشد مساحت مثلث کدام است؟ (O مرکز مختصات است.)

$A(\alpha, k), B(\beta, k), O(0,0)$
 $m_{OA} \cdot m_{OB} = -1 \Rightarrow m_{OA} = \frac{\alpha}{k}, m_{OB} = \frac{\beta}{k} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{k^2} = -1$

$x^2 - 2x = k \Rightarrow x^2 - 2x - k = 0 \Rightarrow P = \alpha\beta = -k \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{k^2} = \frac{-k}{k^2} = -\frac{1}{k} = -1 \Rightarrow k = 1$
 $AB = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4+4}}{1} = 2\sqrt{2}$
 $OH = (k-0) = 1 \Rightarrow S_{OAB} = \frac{AB \times OH}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 1}{2} = \sqrt{2}$

$x^2 - 2x - 1 = 0$
 $AB = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4+4}}{1} = 2\sqrt{2}$
 $OH = (k-0) = 1 \Rightarrow S_{OAB} = \frac{AB \times OH}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 1}{2} = \sqrt{2}$



توجه

(ریشه لگاریتمی)

$$S = -\frac{m-2}{1} = (2-m)$$

$$m=1$$

$$P = -\frac{(m+2)}{1} = -m-2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

۱۱۷- اگر مجموع مربعات ریشه‌های معادله $x^2 + (m-2)x - (m+2) = 0$ کمترین مقدار ممکن باشد، اختلاف دو ریشه کدام است؟

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (2-m)^2 - 2(-m-2) = m^2 - 4m + 4 + 2m + 4 = m^2 - 2m + 8$$

$$\sqrt{17} \quad (1)$$

$$m_5 = -\frac{-2}{1} = 1 \rightarrow m=1 \rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \rightarrow \Delta = \frac{\sqrt{17}}{181} = \sqrt{1+14} = \sqrt{15}$$

$$3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{19} \quad (3)$$

$$2\sqrt{5} \quad (4)$$

۱۱۸- شخصی با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه بر روی یک تسمه که با سرعت ثابتی در یک جهت حرکت می‌کند، راه می‌رود. این شخص ۹.۰ متر مسافت را روی این تسمه به صورت رفت و برگشتی طی می‌کند، به طوری که اختلاف مدت زمان رفت و مدت زمان برگشت یک دقیقه است. سرعت حرکت تسمه بر حسب متر بر ثانیه کدام است؟

رفت $v = v+2$ برگشت $v = v-2$ 9.0 9.0 $2-v$ $2-v$ t_r t_b

$$t_r = \frac{9.0}{v+2} \quad t_b = \frac{9.0}{v-2} \Rightarrow t_r - t_b = 4 \Rightarrow \frac{9.0}{v+2} - \frac{9.0}{v-2} = 4 \Rightarrow \frac{9.0(v-2) - 9.0(v+2)}{(v+2)(v-2)} = 4$$

$$v=1$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

۱۱۹- اختلاف جواب‌های معادله $\frac{3\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}} = x$ کدام است؟

$$\sqrt{x} = t$$

$$2 - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$4 - 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} - 2 \quad (4)$$

$$(t-1)(t^2+t-1) \Rightarrow t_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} > 0 \Rightarrow t = \sqrt{x} = (-1+\sqrt{2})$$

۱۲۰- معادله $x^2 - ax + b = 0$ یک جواب حقیقی دارد. بیشترین مقدار ab کدام است؟

$$6 \quad (1)$$

$$5 \quad (2)$$

$$8 \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$x^2 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x+1)(x-2)$$

$$x^2 - ax + b = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2 \Rightarrow a=1, b=-2 \rightarrow ab=-2$$

$$x^2 - ax + b = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow a=3, b=2 \rightarrow ab=6$$

$$x^2 - ax + b = (x-1)(x+1) = x^2 - 1 \Rightarrow a=0, b=-1 \rightarrow ab=0$$

۱۲۱- α و β جواب‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ هستند. حاصل $\alpha^2(\beta^2 - 9)$ کدام است؟

$$9 \quad (1)$$

$$33 \quad (2)$$

$$-15 \quad (3)$$

$$-27 \quad (4)$$

$$\alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \quad \beta^2 - \beta - 3 = 0 \rightarrow \beta^2 = \beta + 3 \rightarrow 4\beta^2 = 4\beta + 12 \Rightarrow 4\beta^2 - 4 = 4\beta + 12$$

$$\alpha^2(4\beta^2 - 4) = (4\alpha + 3)(4\beta + 3) = 16\alpha\beta + 12\alpha + 12\beta + 9 = 16P + 12S + 9 = -48 + 12 + 9 = -27$$

۱۲۲- ماشین A کاری را به تنهایی در ۲ ساعت انجام می‌دهد و در صورت همکاری ماشین B، همان کار در ۸۰ دقیقه تمام می‌شود.

حال اگر A و B کاری را با هم شروع کنند و پس از ۵۰ دقیقه کار همزمان ماشین خاموش شود، ماشین B در چند دقیقه دیگر کار را تمام می‌کند؟

$$45 \quad (1)$$

$$90 \quad (2)$$

$$60 \quad (3)$$

$$75 \quad (4)$$

$$v_A = \frac{1}{12}, \quad v_A + v_B = \frac{1}{12} + \frac{1}{t} = \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{12+t}{12t} = \frac{1}{80} \Rightarrow 12 \times 80 + 80t = 12t \Rightarrow 960 + 80t = 12t \Rightarrow 748 = 68t \Rightarrow t = 10.85 \approx 11 \text{ min}$$

$$960 + 80t = 12t \rightarrow t = 10.85 \text{ min}$$

بعد از ۵۰ دقیقه ۳/۸ کار باقی‌مانده

$$A \rightarrow B: 1, 6 \quad ? 6 \rightarrow \frac{50}{80} = \frac{5}{8} \Rightarrow 6 \text{ ساعت}$$

$$1, 6 \quad \frac{5}{8} \Rightarrow t = \frac{12 \times 5}{8} = 7.5 \text{ min} \Rightarrow t = 10.85 \text{ min} = 11 \text{ min}$$



$$P = \alpha\beta = \frac{2-m}{3}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{1-2m}{3}$$

۱۲۳- معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow 2-m = 9-6m \Rightarrow 5m = 7 \Rightarrow m = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{7}{5} \end{array} \right. \rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 0 \quad \Delta = 9 - 24 < 0$$

۱۲۴- اگر $a = 2^{\sqrt{2}-1}$ و $a^b = 2^{\sqrt{2}+1}$ مقدار b کدام است؟

$$a = 2^{\sqrt{2}-1} \Rightarrow a^b = (2^{\sqrt{2}-1})^b = 2^{(\sqrt{2}-1)b} = 2^{\sqrt{2}+1} \Rightarrow (\sqrt{2}-1)b = \sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 3+2\sqrt{2}$$

۱۲۵- اعداد طبیعی زوج را چنان دسته‌بندی کرده‌ایم که دسته اول $\{2\}$ و در دسته‌های بعدی، تعداد اعضای هر دسته برابر کوچک‌ترین عدد دسته قبلی است. بزرگ‌ترین عدد دسته دوازدهم کدام است؟

$$\{2\}, \{4, 4\}, \{8, 10, 12, 14\}, \{16, 18, \dots\}$$

کوچک‌ترین عدد دسته قبلی است. بزرگ‌ترین عدد دسته دوازدهم کدام است؟

$$\Rightarrow 2^{13} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 8192 - 2$$

۱۲۶- ریشه سیزدهم عدد $A = \frac{64\sqrt{270}}{3(225)^{\frac{1}{4}}}$ چند برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد؟

$$A = \frac{2^4 \times (3^3 \times 5)}{3 \times (3^2 \times 5^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^4 \times 3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{15}{4}} \Rightarrow A^{\frac{1}{13}} = (2^{\frac{15}{4}})^{\frac{1}{13}} = 2^{\frac{15}{52}} = \sqrt{2}$$

۱۲۷- اگر $x+y=3$ و $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=\sqrt{5}$ حاصل x^3+y^3 کدام است؟

$$xy(x+y) = 3xy = 5 \Rightarrow xy = \frac{5}{3}$$

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 27 - 3 \times \frac{5}{3} \times 3 = 27 - 15 = 12$$

۱۲۸- اگر $52 = \frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}}$ باشد، مقدار x کدام است؟

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} = 1 \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2$$

۱۲۹- حاصل عبارت $(2(\sqrt{9}-1))^{-1} \times \frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}$ کدام است؟

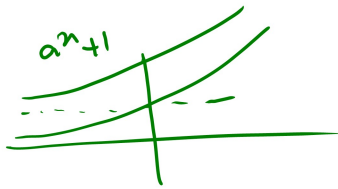
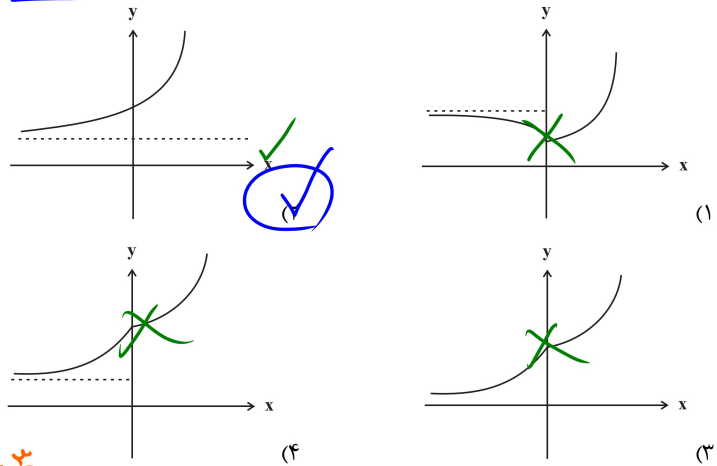
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{19}$$

$$\frac{(\sqrt{9}-1)^{-1}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2} - \frac{(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 2^x + 2^x = 2^x + 1 = 4^x + 1 \\ x < 0 \rightarrow 2^x + 2^{-x} = 1 + 4^x \end{cases}$$

۱۳۰- نمودار تابع $f(x) = 2^{x+|x|} + 2^{x-|x|}$ به کدام صورت است؟



$a^x, a > 1$

$[a] = [\log_2^2] = [2^{\log_2}] = 2$

۱۳۱- اگر $x = a$ جواب معادله $x = \log(4^x - 9) + \log 5$ باشد، $[a]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

$a = \log 4^a - 9 + \log 5 \Rightarrow a - a \log 5 = \log 4^a - 9$
 $a(1 - \log 5) = \log(4^a - 9) \Rightarrow \log 2^a = \log(4^a - 9) \Rightarrow 2^a = (2^a)^2 - 9 \Rightarrow t^2 - t - 9 = 0$
 $(t-1)(t+9) = 0 \Rightarrow t = 1$ (صفر)

۱۳۲- اگر $a = \log_{12} 12$ ، $\log_{125} 0$ / ۱۲۵، $\log_{125} 12$ کدام است؟

$a = \log_{12} 12 = \frac{\log 12}{\log 12} = 1$

فکت: $1 = \log_4 4 = \log_4 2 + \log_4 2 \Rightarrow \log_4 2 = 1 - \log_4 2$

$\frac{2+6a}{a+1}$	(۱)	$\frac{-2x(xa-1)}{a+1}$
$\frac{1+3a}{2a+1}$	(۲)	$\frac{a+1}{-4a+3}$
$\frac{2-6a}{a+1}$	(۳)	$\frac{a+1}{-4a+3}$
$\frac{1-2a}{2a+1}$	(۴)	

$a = \frac{\log_4 4 + 1}{1 - \log_4 4} \Rightarrow \frac{\log_4 4 + 1}{-\log_4 4 + 1} = a \rightarrow -a \log_4 4 + 2a = \log_4 4 + 1$

$\log_4^{\frac{1}{a}} = -a \log_4 4 \Rightarrow \log_4 4 = \frac{2a-1}{a+1} \leftarrow 2a-1 = (a+1) \log_4 4$

۱۳۳- اگر $2^{-2a} + 3 \times 4^{-a} = \frac{13}{16}$ ، معادله $\log_{-x} |x-a| + \log_{-x} 2 = 2$ چند جواب دارد؟

$(2^{-2a})^2 + 3 \times 4^{-2a} = \frac{13}{16} \rightarrow t^2 + 3t = \frac{13}{16} \rightarrow 16t^2 + 48t - 13 = 0$
 $(t+6)(t-1) = 0 \Rightarrow t = 1$
 $2^{-2a} = 1 \Rightarrow -2a = 0 \Rightarrow a = 0$

۱۳۴- اگر $\log_2 42 = a$ و $\log_2 3 = b$ ، حاصل $\log_4 8$ بر حسب a و b کدام است؟

$21^b = 3, 2^a = 42 \Rightarrow 2^a = 2 \times 21 \Rightarrow 2^{a-1} = 21 \Rightarrow 2^{b(a-1)} = 21^b = 3$

$\frac{3}{2b(a-1)}$	(۱)
$\frac{2}{3b(a-1)}$	(۲)
$\frac{3}{2a(b-1)}$	(۳)
$\frac{2}{3a(b-1)}$	(۴)

$\log_a^{\wedge} = \log_{2^r}^{\mu} = \frac{\mu}{r} \log_2^{\mu} = \frac{\mu}{r} \times \log_2^{\mu} = \frac{\mu}{2b(a-1)} \log_2^{\mu}$



۱۳۵- α و β جواب‌های معادله $10^{x^2-x} = 5$ هستند. اگر $A = \alpha + \alpha\beta + \beta$ باشد، حاصل $10^{0 \cdot A}$ کدام است؟

از طرفین 10 بگیریم:

$$10^{\alpha^2 - \alpha} = 10^{\beta^2 - \beta} = 10^{\frac{5}{10}} \rightarrow \alpha^2 - \alpha - 10^{\frac{5}{10}} = 0 \rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 1 \\ P = -10^{\frac{5}{10}} \end{cases} \rightarrow A = 1 - 10^{\frac{5}{10}} = 10^{-\frac{5}{10}}$$

$\log 4$ (۱)
 $\log 5$ (۲)
 4 (۳)
 5 (۴)

۱۳۶- میانگین داده‌های $4, 3a + 4, 17, 15, 11, 3$ و 2 است. میانگین داده‌های دسته دوم کدام است؟

میانگین $\bar{x}_1 = \frac{4+3a+4}{4}$ و $\bar{x}_2 = \frac{17+15+11+3}{4}$

میانگین $\bar{x} = \frac{4+3a+4+17+15+11+3}{8} = 9$

$$\frac{4+3a+4}{4} - \frac{17+15+11+3}{4} = 9 - 9 \rightarrow 4+3a = 18 \rightarrow a = 4$$

۱/۵ (۱)
 9 (۲)
 $9/5$ (۳)
 10 (۴)

۱۳۷- به ۲۰ داده آماری با انحراف معیار δ ، حداقل چند داده مساوی یا میانگین باید اضافه شود تا انحراف معیار به کمتر از 4 برسد؟

$\sigma = \delta \quad n = 20$

$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

$20 \delta^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{20} \Rightarrow 5 \delta^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{11}$

$\sigma^2 < 16 \rightarrow \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} < 16 \rightarrow 20 \delta^2 < 16n \Rightarrow n > \frac{20 \delta^2}{16} = \frac{5 \delta^2}{4}$

۱۰ (۱)
 12 (۲)
 13 (۳)
 14 (۴)

۱۳۸- اگر ضریب تغییرات داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n برابر $1/2$ و میانگین این داده‌ها برابر \bar{X} باشد، ضریب تغییرات داده‌های $3X_1 + \bar{X}, 3X_2 + \bar{X}, \dots, 3X_n + \bar{X}$ کدام است؟

$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_v = \frac{1}{2} \Rightarrow C_v = \frac{1}{2} \Rightarrow C_v = \frac{1}{2}$

۰/۴ (۱)
 $0/8$ (۲)
 $0/8$ (۳)
 $0/9$ (۴)

۱۳۹- داده‌های آماری $25, 17, 17, 14, 14, 7, 7, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ مفروض است. اختلاف بین میانگین و میانگین داده‌های بین چارک اول و سوم کدام است؟

چارک‌ها: $Q_1 = 4, Q_3 = 17$

$17 - 4 = 13$

۱۶ (۱)
 2 (۲)
 3 (۳)
 4 (۴)

۱۴۰- میانگین و واریانس ۲۰ داده آماری به ترتیب برابر ۳ و ۴ است. اگر هر داده را در $\frac{1}{2}$ ضرب و با ۱ جمع کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

$\sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2 \quad \bar{x} = 3$

$\sigma^2 = (\frac{1}{2})^2 \times 4 = \frac{1}{4} \times 4 = 1 \quad \bar{x} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{5}$ (۱)
 $\frac{1}{5}$ (۲)
 $\frac{5}{4}$ (۳)
 $\frac{5}{2}$ (۴)

$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$