

وقت پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

ریاضی پایه: ریاضی ۱ و حسابان ۱: کل کتاب سوال (۱-۲)

۱- مقدار عبارت $2[\sin 60^\circ] - 2[\sin 60^\circ]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)
 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sqrt{3} \approx 1.7 \Rightarrow \sin 45^\circ = 1.0$

$$[\sqrt{3}] - 2 [1.7]$$

$$1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$$

-۱ (۲) ۱ (✓)
 -۲ (۴) ۲ (۳)

۲- خط $y=1$ و نمودار تابع $f(x) = x^2 - ax + 5$ یک نقطه مشترک دارند. مقدار $f(2)$ کدام می تواند باشد؟
 مربع کامل $\Delta = 0$ بند جواب $f(x)=1$

$$x^2 - ax + 5 = 1 \Rightarrow x^2 - ax + 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$f(2) = 4 - 4a + 5 = 9 - 4a$
 $f(2) = 1 \Rightarrow 9 - 4a = 1 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$
 $f(2) = 16$ (۱) ۱ (✓)

۳- اگر $A = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ باشد، حاصل $(A+1)^2$ کدام است؟

$$A = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+3 - (\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$(A+1)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+3}{2} + 1 \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+5}{2} \right)^2 = \frac{(\sqrt{2}+5)^2}{4} = \frac{2+10\sqrt{2}+25}{4} = \frac{27+10\sqrt{2}}{4}$$

۱۶ (۲) ۸ (۱) ✓
 ۶۴ (۴) ۳۲ (۳)

۴- اگر دنباله اعداد $2^{2a}, 2\sqrt{2}, (4\sqrt{2})^{b+2}, \dots$ هندسی باشد، مجموع پنج جمله اول دنباله حسابی $x, 2a+1, y, \frac{5}{2}b+2, \dots$

$$2^{2a} \times (4\sqrt{2})^{b+2} = (2\sqrt{2})^2 = 8 = 2^3$$

$$2^{2a} \times 2^{\frac{5}{2}(b+2)} = 2^3 \Rightarrow 2a + \frac{5}{2}(b+2) = 3$$

$$2a + \frac{5b}{2} + 5 = 3 \Rightarrow 2a + \frac{5b}{2} = -2$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2a + 1 + y + \frac{5}{2}b + 2 + 2 = 2a + \frac{5b}{2} + 5 = -2 + 5 = 3$$

$$a_1 + a_5 = 2a + 1 = 2a + \frac{5b}{2} + 5 = -2 + 5 = 3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2a + 1 + 2a + 1 + 2a + 1 + 2a + 1 + 2a + 1 = 10a + 5 = 10 \times 0.3 + 5 = 3 + 5 = 8$$

۵ (✓) ۸ (۱)
 ۴/۵ (۴) ۷/۵ (۳)

✓ واسطه مساوی a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

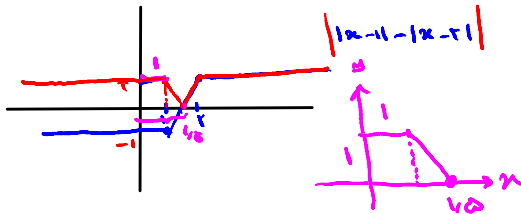
محل انجام محاسبات

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$

۵- توابع $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ و $g = \{(-2, 6), (22, 1)\}$ مفروض اند. اگر $f + g^{-1} = \{(6, -3), (1, 22)\}$ حاصل ab کدام است؟

$f(u) = a - \sqrt{u+b}$, $g^{-1}(u) = 2 \Rightarrow g(2) = 1 \Rightarrow 2 = -2 \Rightarrow f + g^{-1}(u) = -2 + a - \sqrt{u+b} = -2 - 1$
 $f(u) = a - \sqrt{u+b}$, $g^{-1}(1) = 22 \Rightarrow g(22) = 1 \Rightarrow 22 = 2 \Rightarrow f + g^{-1}(1) = 2 + a - \sqrt{1+b} = 2 - 6$
 $\Rightarrow a - \sqrt{4+a-1} = -1 \Rightarrow a+1 = \sqrt{4+a-1}$
 $a^2 + 2a + 1 = 4 + a - 1 \Rightarrow 2a + 1 = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = a^2 - 1 = 0$

۶- مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = |x-1| - |x-2|$ و محورهای مختصات کدام است؟



$\frac{1}{4}$ (۲)
 $\frac{3}{2}$ (۴)

$S = \frac{(1+1) \cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

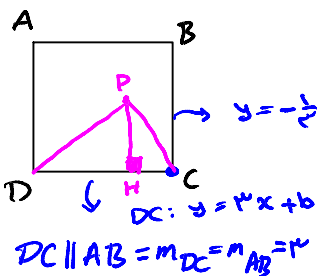
$\frac{5}{4}$ (۳)

۷- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 - 6\alpha + 9)^{\beta} (\beta - 3)^{\alpha}$ کدام است؟

$(\beta - 3)^{\alpha} = (\beta - 3)^{\beta} = (\beta^2 - 4\beta + 9)^{\beta} = 7^{\beta}$
 $7^{\beta} \cdot 7^{\alpha} = 7^{\alpha+\beta} = 7^4 = 2401$

۸- اگر جواب‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ جذر جواب‌های معادله $x^2 - (a+1)x + b+2 = 0$ باشند، حاصل ab کدام است؟
 $S = \alpha + \beta = -\frac{-(a+1)}{1} = a+1$, $P = \alpha\beta = b+2$
 $\alpha\beta = (b+2) = b^2 \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \Rightarrow b = -1$ (عقبت)
 $ab = 1 \cdot (-1) = -1$

۹- نقاط $A(1, 1)$ و $B(3, 7)$ که دو رأس از رئوس مربع ABCD هستند، به همراه نقطه $P(7, 9)$ مفروض اند. مساحت مثلث PCD کدام می‌تواند باشد؟



$m_{AB} = \frac{7-1}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$, $BC \perp AB \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{BC} = -\frac{1}{3}$, $BE \perp BC$
 $DC: y = 3x + b$
 $PH = \frac{|9 - 3(7) - 1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{19}{\sqrt{10}}$
 $|DC| = \sqrt{5}$
 $S_{PCD} = \frac{1}{2} \times DC \times PH = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{19}{\sqrt{10}} = \frac{19\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow y_{BC} = y_{DC} \Rightarrow -\frac{1}{3}x + 8 = 3x + b$
 $\Rightarrow x = \frac{3}{4}(8-b) = \frac{6-b}{4}$
 $\Rightarrow y = \frac{3(6-b)}{4} + b = \frac{9+3b}{4}$

محل انجام محاسبات

طول مربع $AB = BC = \sqrt{\left(\frac{3-b}{4}\right)^2 + \left(\frac{3+3b}{4}\right)^2} = \sqrt{(1-b)^2 + (1+b)^2} = \sqrt{4+4b^2} = 2\sqrt{1+b^2}$

$\Rightarrow \left(\frac{3-b}{4}\right)^2 + \left(\frac{3+3b}{4}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{9-b^2}{16} + \frac{9+9b+4b^2}{16} = 4 \Rightarrow 9b^2 + 36 + 36b + 9 = 64 \Rightarrow 9b^2 + 36b - 19 = 0$
 $\Rightarrow b = -2$ or $b = 1$
 $\Rightarrow (b+2)^2 = (1+2)^2 = 9$

$$f(x) = x^2 + b = -2$$

$$(2a+m)x + m+h-a+b = 2x-2$$

$$(2ax-a+b) + (m+h) = 2x-2$$

$$\begin{cases} f(2x-1) + g(x+1) = 2x-2 \\ f(x+1) - g(2x-1) = -x-2 \end{cases}$$

$$(2ax+a+b) - (2mx-m+h) = -x-2$$

$$(a-2m)x + a+b+m-h = -x-2$$

$$\begin{cases} a-2m = -1 \\ a+b+m-h = -2 \end{cases}$$

$$g(x) = mx + h$$

10- برای دو تابع خطی f و g روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} a-2m = -1 \\ 2a+m = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h+b = -1 \\ b-h = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ h = 0 \end{cases}$$

مقدار g(1) کدام است؟

$$g(x) = 2x + 0$$

$$g(1) = 2 + 0 = 2$$

2 (د)

1 (ب)

3 (ا)

11- نمودار تابع $f(x) = \frac{2^{x+1} - 2^{-x} + 1}{2^x + 1}$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی گذرد؟

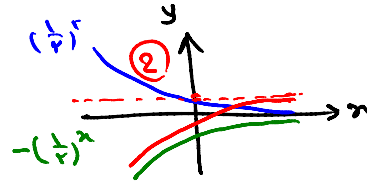
$$f(x) = \frac{2 \cdot 2^x - \frac{1}{2^x} + 1}{2^x + 1} = \frac{2t - \frac{1}{t} + 1}{t+1} = \frac{2t^2 + t - 1}{t+1} = \frac{(2t-1)(t+1)}{t+1} = \frac{2t-1}{1} = 2 - \frac{1}{2^x}$$

اول (1)

$$\Rightarrow f(x) = 2 - (2^{-x}) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

4 (د)

3 (س)



12- جواب معادله $\log_5 x + \log_x 5 = 1$ به صورت $x = 5^n$ است. حاصل n^6 کدام است؟

$$\frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_x 5} = \frac{\log_5^2 x + \log_x^2 5}{(\log_5^2 x)(\log_x^2 5)} = \frac{\log_5^2 x}{(\log_5^2 x)(\log_5^2 5)} = 1 \Rightarrow (\log_5^2 x) = (\log_5^2 5)(\log_5^2 x)$$

11 (1)

$$a^{\log_b c} = b^{\log_a c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{\log_5^2 n} = \log_5^2 n \Rightarrow 4^{\frac{1}{n}} = 4 = 4^{\log_5^2 n} \Rightarrow \frac{1}{n} = \log_5^2 n$$

13- اگر $f(x) = (x+2)(\sqrt{x+2})$ و $(f \circ g)(x) = x+8$ باشد، مقدار تابع $g \circ g$ به ازای $x = \left(\frac{9}{8}\right)^2$ کدام است؟

$$f(g(x)) = (g(x)+2)(\sqrt{g(x)+2}) = g(x)\sqrt{g(x)+2} + 2\sqrt{g(x)+2} + 2 = t^2 + 2t + 2 + 2 = t^2 + 2t + 4$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = (t+1)^2 + 2 = (\sqrt{g(x)+1})^2 + 2 = g(x) + 1 + 2 = g(x) + 3$$

$$\frac{9}{64} (د)$$

$$\frac{49}{64} (ب)$$

$$g(x) = (\sqrt{x+1})^2$$

$$g\left(g\left(\frac{9}{8}\right)\right) = g\left(\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 1\right) = g\left(\frac{81}{64} + 1\right) = g\left(\frac{145}{64}\right) = \left(\frac{145}{64}\right)^2 = \frac{21025}{4096}$$

محل انجام محاسبات

١٤- در دایره شکل زیر، به شعاع ٢، مساحت‌های قسمت‌های رنگی با S_1 و S_2 مشخص شده است. حاصل $2S_2 - S_1$ کدام است؟

$\cos \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$
 $S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ = 1$
 $2S_2 - S_1 = 2 - \sqrt{3}$

(1) $2 - \sqrt{3}$
 (2) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
 (3) $\sqrt{3} - 2$
 (4) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

١٥- اگر $f(x) = \frac{\pi}{4} \cos x$ و $g(x) = \sin(x + \frac{\Delta\pi}{12})$ باشد، برد تابع $g \circ f$ بازه $[a, b]$ است. حاصل $b - a$ کدام است؟

$-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$
 $\frac{\pi}{4} \leq f(x) + \frac{\pi}{12} \leq \frac{7\pi}{12}$
 $\frac{\pi}{4} \leq f(x) + \frac{\pi}{12} \leq \frac{7\pi}{12}$
 $\max \sin = 1, \min \sin = \frac{1}{4} \Rightarrow y \in [\frac{1}{4}, 1] \Rightarrow b - a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(1) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 (2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
 (3) $\frac{1}{2}$

١٦- اگر $\sin(\alpha + \frac{\pi}{8}) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$\cos(2(\alpha + \frac{\pi}{8})) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{8}) = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{4})$
 $\cos(2(\alpha + \frac{\pi}{8})) = 2\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{8}) - 1 = 2 \times \frac{1}{81} - 1 = \frac{2}{81} - 1 = \frac{2-81}{81} = -\frac{79}{81} = \cos(2\alpha + \frac{\pi}{4})$
 $= -\sin 2\alpha = -\frac{79}{81} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{79}{81}$

(1) $-\frac{79}{81}$
 (2) $\frac{79}{81}$

١٧- اگر $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = 3\sin(\frac{11\pi}{3} - \alpha)$ باشد، مقدار $\sin^2(\frac{7\pi}{3} + \alpha)$ کدام است؟

$\alpha - \frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{3} - \alpha = \frac{21\pi}{3} = 7\pi$
 $\frac{11\pi}{3} - \alpha = \frac{7\pi}{3} - (\alpha - \frac{\pi}{6})$
 $\sin(\frac{11\pi}{3} - \alpha) = \sin(\frac{7\pi}{3} - (\alpha - \frac{\pi}{6})) = -\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$
 $\Rightarrow \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = -3\cos(\alpha - \frac{\pi}{6})$
 $\Rightarrow \tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = -3$
 $\tan(\frac{7\pi}{3} + \alpha - \frac{\pi}{6}) = \cot(\alpha - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{3}$

(1) $\frac{1}{10}$
 (2) $\frac{1}{4}$
 (3) $\frac{1}{9}$

محل انجام محاسبات

$\sin^2(\frac{7\pi}{3} + \alpha) = \sin^2(2\pi + \frac{\pi}{3} + \alpha) = \sin^2(\frac{\pi}{3} + \alpha)$

$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha \rightarrow 1 + 9 = \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{3} + \alpha)} = 10 = \frac{1}{\sin^2} \Rightarrow \sin^2 = \frac{1}{10}$

18- تابع $f(x) = x + \frac{m|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 3x + 2}$ و $g(x) = [-x]x^2 + 3x$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار m تابع $f \circ g$ در $x=1$ حد دارد؟

$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 3x = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(g(x)) = 1 + \frac{m|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 3x + 2} = 1 + m$

$x \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x^2 + 3x = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = 2 + \frac{m|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 3x + 2} = 2 - m$

امکان پذیر نیست. $\begin{cases} 2 - m = 1 + m \\ 1 = 2m \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

19- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sqrt{\cos x} \sqrt{\cos 2x} - 1}{\sin x \sin 2x}$ کدام است؟

$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\cos x)(\cos 2x) - 1}{\sin x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{2 \cos^2 x - 1 - 1}{2 \sin x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{2 \cos^2 x - 2}{2 \sin x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x \sin 2x}$

$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\sin x \times 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\omega(\cos x - 1)}{2(1 - \cos^2 x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\omega(\cos x - 1)}{2(1 - \cos x)(1 + \cos x) \cos x}$

20- تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 + ax + 1} & ; x \neq 3 \\ |4x + b| & ; x = 3 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته است. حاصل abc کدام است؟

$1 + 4a + 1 = c \rightarrow 4a = c - 2 \rightarrow a = \frac{c-2}{4}$

$abc = \frac{4 \times 3}{4 \times 3} \times \frac{c-2}{4} = \frac{3(c-2)}{4}$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{\sqrt{18 + 3a + 1}}{|12 + b|} = c = \frac{\sqrt{2(9c^2 - 4c + 9)}}{4|c - 3|}$

$12 + b = 0 \rightarrow b = -12$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2|2c-4c+9|}}{4|c-3|} = \frac{\sqrt{2|2-c|}}{4|c-3|} = \frac{\sqrt{2}}{4} = c$