

واسطه هندسی

$a, b, c \Rightarrow ac = b^2$

۱- در دنباله هندسی $a_n (a_n \neq 0)$ ، رابطه $a_{12}a_{16} = 16a_{14}$ برقرار است. حاصل $a_{11}a_{21}$ کدام است؟
 ۱ (۱) $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$
 ۲ (۳) ۴
 ۳ (۴) ۱۶

$a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} a_{17} a_{18} a_{19} a_{20} a_{21}$

$a_{14}^2 \times a_{14}^2 \times a_{14}^2 \times a_{14}^2 \times a_{14}^2 = a_{14}^5 = 14a_{14} \Rightarrow a_{14}^4 = 14$

$\Rightarrow a_{14} = \sqrt[4]{14}$

$a_{11} \times a_{21} = a_{14}^2 = (\sqrt[4]{14})^2 = \sqrt{14}$

نسبت: $11 + 21 = 32$

۲- مجموع جملات یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = 2n^2 - 6n$ محاسبه می شود. این دنباله چند جمله ۳ رقمی دارد؟

$S_n = \frac{d}{2}n^2 + O_n$

$S_n = 2n^2 - 6n \rightarrow \frac{d}{2} = 2 \Rightarrow d = 4$

$S_1 = a_1 = 2 - 6 = -4$
 $S_2 = a_1 + a_2 = 2a_1 + d = -8 + 4 = -4 \rightarrow d = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)d = -4 + (n-1)4 = 4n - 8$

$\left. \begin{matrix} n = 27 \rightarrow a_n = 100 \\ n = 201 \rightarrow a_n = 996 \end{matrix} \right\}$ تعداد = $\frac{201 - 27 + 1}{201 + 1 = 202}$

۳- اگر $A = \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{6} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{16} + \sqrt{12} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{90} + \sqrt{81}}$ باشد، حاصل $[A]$ کدام است؟
 ۱ (۱) $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$
 ۲ (۳) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
 ۳ (۴) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

$a^n \pm b^n = (a \pm b)(a^{n-1} \mp ab + b^{n-1})$

$$A = -1 + \sqrt[2]{10} \Rightarrow [A] = [\sqrt[2]{10} - 1] = [\underbrace{\sqrt[2]{10}}_{r_1}] - 1$$

$$\sqrt[2]{10} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[4]{10}$$

$$2 < \sqrt[2]{10} < 3$$

$$r_1 - 1 = 1$$

۴- ریشه هفتم عدد $4\sqrt[2]{2}$ دو برابر ریشه نهم عدد a می باشد. \log_2^a کدام است؟

$\frac{a}{9}$ $\sqrt[7]{0} = 0$
 $-2/5(3)$ $-2(2)$ $-1/5(1)$

$$4\sqrt[2]{2} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \rightarrow \text{فرد پس} \Rightarrow (2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{5}{18}} = 2 \times a^{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{2^{\frac{5}{18}}}{2} = a^{\frac{1}{9}} \Rightarrow 2^{-\frac{1}{18}} = a^{\frac{1}{9}} \xrightarrow{\text{توان 9}} \Rightarrow (2^{-\frac{1}{18}})^9 = 2^{-\frac{1}{2}} = a$$

$$\log_2 a = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} \log_2 2 = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

۵- α و β ریشه های معادله $2x^2 + kx - 5 = 0$ بوده و رابطه $16\alpha^2 + \frac{100}{\alpha^2} = 89$ برقرار است. k کدام می تواند باشد؟

$$S = \alpha + \beta = \frac{-k}{2}$$

$$\frac{-12}{4} (4)$$

$$\frac{12}{2} (3)$$

$$\frac{-2}{4} (2)$$

$$\frac{3}{2} (1)$$

$$P = \alpha\beta = \frac{-5}{2} \rightarrow \beta = \frac{-5}{2\alpha} \xrightarrow{\text{توان 2}} \beta^2 = \frac{25}{4\alpha^2} \Rightarrow \frac{4}{25}\beta^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

سنگه شربت $\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{f_1 \omega + 1}{\omega + 1 + x}$ $\rightarrow \frac{9}{10} \times \omega = \frac{9}{1} = 9 \text{ kg}$
 $\omega \omega = \omega + x \Rightarrow x = +9$

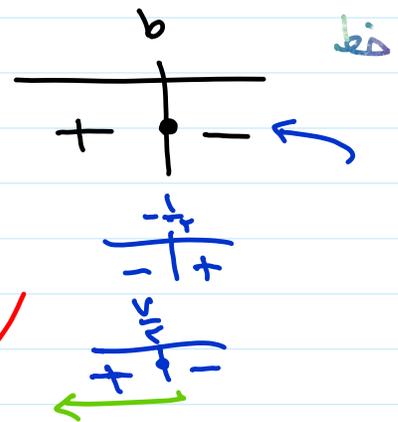
۸- مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{x-3}{ax+2} \right| < 2$ به صورت $(-\infty, b)$ می باشد. $a-b$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) $-4/3$

تغییر $\Rightarrow x^2 - 4x + 9 < 4a^2 x^2 + 14ax + 14$

$\Rightarrow (4a^2 - 1)x^2 + (14a + 4)x + 7 > 0$

$4a^2 - 1 = 0 \rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$

$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \rightarrow |4x + 7| > 0 \rightarrow x > -\frac{7}{4} \quad \times \\ a = -\frac{1}{2} \rightarrow -4x + 7 > 0 \rightarrow x < \frac{7}{4} \quad \checkmark \end{array} \right.$



$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{7}{4} \rightarrow a - b = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{15}{4}$

۹- توابع $f(x) = \sqrt{2 - [3x+1]}$ و $g(x) = \sqrt{[3x+1] - 2}$ مفروض اند. دامنه تابع $(f \times g)(x)$ به کدام صورت است؟
 (۱) $[a, b] - \{c\}$ (۲) $(a, b) - \{c\}$ (۳) $[a, b] \cup \{c\}$ (۴) $(a, b) \cup \{c\}$

$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

$$D_{f \circ g} = D_f \cap D_g$$

$$(a, b] \cup \{c\} \quad (a, b) \cup \{c\} \quad (a, b] - \{c\} \quad [a, b) - \{c\}$$

$$D_f \Rightarrow 2 - |[x_{n+1}]| \geq 0 \Rightarrow |[x_{n+1}]| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq [x_{n+1}] \leq 2$$

$$[x_{n+1}] = -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \rightarrow -2 \leq x_{n+1} < 2 \rightarrow -1 \leq x_n < 2$$

$$D_f$$

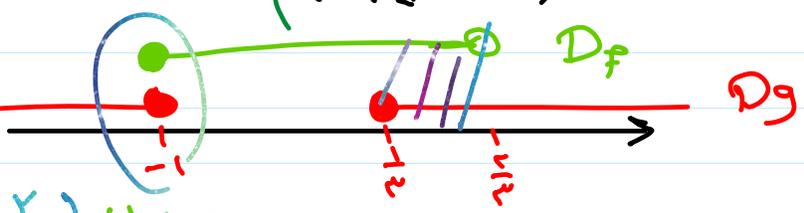
$$-1 \leq x < \frac{2}{3}$$

$$D_g \quad |[x_{n+1}] - 2| \geq 0 \rightarrow [x_{n+1}] \geq 2$$

$$\rightarrow |[x_{n+1}]| \geq 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} \geq 2 \rightarrow x \geq \frac{1}{3} \\ x_{n+1} \leq -2 \rightarrow x \leq -1 \end{array} \right\}$$

$$D_g = (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$$

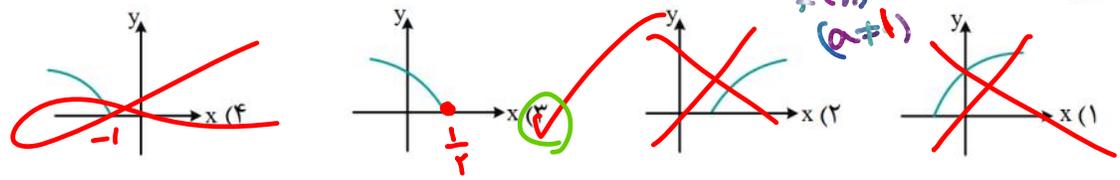
$$D_{g \circ f} = D_g \cap D_f =$$



$$\text{استمرار} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{-1\}$$

10- تابع $f(x)$ خطی و غیرهمبانی است. اگر $f(x) = f^{-1}(x)$ و $f(2) = 3f(1)$ باشد، کدام گزینه نمودار تابع $y = \sqrt{f(x)}$ را نشان می‌دهد؟

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 1)$$



$$f(x) = f^{-1}(x) \quad \begin{array}{l} \text{از دو طرف} \\ \text{از دو طرف} \end{array}$$

$$f(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(ax+b) = a(ax+b) + b = x \Rightarrow \underbrace{a^2}x + \underbrace{ab+b} = x$$

$$a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1 \rightarrow \underline{a = -1}$$

$$b(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -x + b = -x + b = f(1) = f(a+b) = -a + b$$

$$\Rightarrow -x + b = -1 + b \rightarrow 1 = 2b \rightarrow \underline{b = \frac{1}{2}}$$

$$f(x) = -x + \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{-x + \frac{1}{2}} \Rightarrow D_y = -x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$x \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

11- توابع غیرخطی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ و $f \circ f(x) = \frac{x}{cx+d}$ مفروض هستند. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

$cx \rightarrow \frac{x}{c}$ ✓

11- توابع غیر خطی
 f(x) = $\frac{ax+b}{cx+1}$ و fof(x) = $\frac{x}{cx+1}$ مفروض هستند. حاصل a+b+c کدام است؟
 (1) صفر (2) -1 (3) -2 (4) -3

$$f(f(x)) = \frac{\frac{ax+b}{cx+1} + b}{\frac{ax+b}{cx+1} - 1} = \frac{x}{cx+1}$$

$$\frac{a^2x + ab + bx - b}{ax + b - cx + 1} = \frac{(a^2 + b)x + ab - b}{(a-1)x + b+1} = \frac{x}{cx+1}$$

$a^2 + b = 1 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$
 $ab - b = 0 \rightarrow b(a-1) = 0$
 $b+1 = 1 \rightarrow b = 0$
 $c = a - 1$

$a = 1 \rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1}$ غلط
 $a = -1 \rightarrow f(x) = \frac{-x}{x-1}$ ✓

12- اگر $g(x) = 4x - 5$ و $f^{-1} \circ g(x) = 15 - 14x$ باشد، حاصل $g \circ f^{-1}(-1)$ کدام است؟
 (1) صفر (2) -9 (3) 1 (4) -11

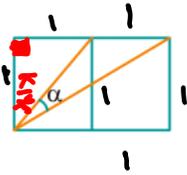
$$(f \circ g(x))^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}(x) \Rightarrow (f^{-1} \circ g(x))^{-1} = (15 - 14x)^{-1}$$

$$g^{-1} \circ f(x) = \frac{x-15}{-14} \quad , \quad g(x) = 4x-5 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+5}{4}$$

$$g^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)+5}{4} = \frac{x-15}{-14} \Rightarrow f(x) = \frac{x-15}{-4} - 5$$

$$f(-1) = \frac{-1-15}{-4} - 5 = -1 \rightarrow g(-1) = -4(-1) - 5 = -1$$

۱۳- طول ضلع هر دو مربع در شکل مقابل ۱ می باشد. $\cot \alpha$ کدام است؟



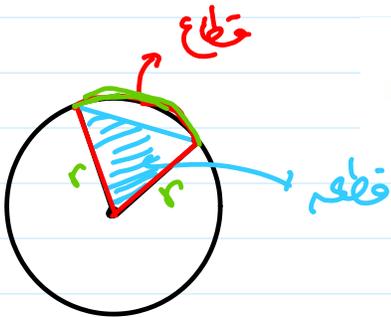
- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{2}{1} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \Rightarrow 2 - 2 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha$$

$$1 = 3 \tan \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

۱۴- مساحت قطاعی در دایره مثلثاتی برابر $\frac{1}{4}$ است. محیط این قطاع کدام است؟



۴ (۴)

$$\frac{S_{\text{قطاع}}}{S_{\text{دایره}}} = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\frac{1}{4}}{\pi r^2}$$

$$\frac{C_{\text{قطاع}}}{C_{\text{دایره}}} = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{P}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \text{ rad}$$

$$\text{میدان رابره} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P = \frac{1}{4} + \sqrt{2} = \frac{1}{4} + \sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

۱۵- فاصله نقطه $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ از خط $(\sin \frac{\pi}{12})x + (\cos \frac{\pi}{12})y = 1$ کدام است؟

$$AH = \frac{\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6})}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{(\sin \frac{\pi}{12}) \cos \frac{\pi}{6} + (\cos \frac{\pi}{12}) \sin \frac{\pi}{6}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 \quad \sqrt{1} = 1$$

$$AH = \frac{\sin(\frac{\pi}{6}) - 1}{1} = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right| = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

۱۶- اگر $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1 + \cos x}{\sin x} = 4$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\alpha}{2}} \tan(x - \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4}$$

$$-4$$

$$\frac{1}{4}$$

$$4$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cot \frac{x}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \cot \left(\frac{x}{2} \right) = f \rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = f$$

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = -\cot \left(\frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow -f$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{-x^2}{2} + 1 \right] = [1.4] = 0$

$\lim_{x \rightarrow k^-} \left[-\frac{x^2}{2} + 1 \right] = -1$ (3)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{4\epsilon - kx^2}}}{kx} = \frac{1}{k - \omega}$ اگر $k \neq 0$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{4\epsilon - kx^2}}}{kx} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{4\epsilon - kx^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{4\epsilon - kx^2}}} = \frac{4\epsilon - (4\epsilon - kx^2)}{kx (\sqrt{1 + \sqrt{4\epsilon - kx^2}})}$$

$$= \frac{\sqrt{kx^2}}{kx (\sqrt{1 + \sqrt{4\epsilon - kx^2}})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{k} |x|}{kx (\sqrt{1 + \sqrt{4\epsilon - kx^2}})} = \frac{-\sqrt{k} x}{kx (\sqrt{1 + \sqrt{4\epsilon - kx^2}})}$$

$$= \frac{-\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k - \omega} \Rightarrow \epsilon k = -\sqrt{k} k + \omega \sqrt{k}$$

$$\epsilon k + \sqrt{k} k = k(\epsilon + \sqrt{k}) = \omega \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \epsilon \sqrt{k} + k = \omega \rightarrow k + \epsilon \sqrt{k} - \omega = 0$$

$$\text{مغضایب} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{k} = 1 \rightarrow k = 1 \\ \sqrt{k} = -\omega \times \end{cases}$$

$$(\sqrt{k} = -5) \times$$

$x < -1$ و $x = 1$ ✓
نیپوستگی و نیپوستگی

$x = 0$
نیپوستگی > $x[x]$

چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟ $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin \pi x & x < -1 \\ x[x] & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \end{cases}$

(۱) صفر (۲) ✓ (۳) (۴)

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim f = \frac{\cancel{\sqrt{(x-1)}} \times \sqrt{(x-1)}}{\cancel{\sqrt{(x-1)}} (\sqrt{x+1})} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 0$$

→ صدا ندارد $\neq f(1) = 1$

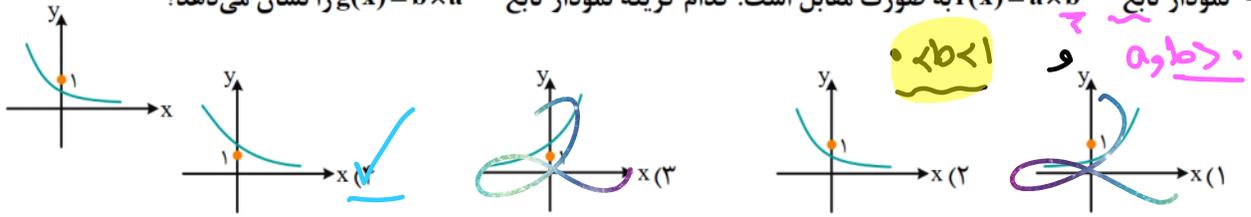
$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow \lim f = 1 [1^-] = 1 \times 0 = 0$$

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow \lim f = -1 \times [-1^+] = -1 \times -1 = +1$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow \lim f = 1 + \sin -\pi = 1 + 0 = +1$$

→ صدا دارد $\neq f(-1) = -1 \times -1 = 1$

۱۹- نمودار تابع $f(x) = a \times b^{x-1}$ به صورت مقابل است. کدام گزینه نمودار تابع $g(x) = b \times a^{x-1}$ را نشان می‌دهد؟



$$f(x) = a \times b^{-1} = \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \underbrace{a < b < 1} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

$$g(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} > 1$$

$$\text{تغییر} = \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

۱۳ (۴)

۲۰- مجموع جواب‌های معادله $\log_{\sqrt{2}}^x + \log_{\sqrt{2}}^x = \log_{\sqrt{2}}^x \times \log_{\sqrt{2}}^x$ کدام است؟

۱۲ (۳)

$$2\sqrt{2} + 1$$

۲ (۱)

$$\log_{\sqrt{2}}^x + \log_{\sqrt{2}}^x = 2 \log_{\sqrt{2}}^x \times 2 \log_{\sqrt{2}}^x = 4 \log_{\sqrt{2}}^x \times \log_{\sqrt{2}}^x$$

$$\frac{\log^x}{\log^{\sqrt{2}}} + \frac{\log^x}{\log^{\sqrt{2}}} = \frac{\log^x \log^{\sqrt{2}} + \log^x \log^{\sqrt{2}}}{\log^{\sqrt{2}} \times \log^{\sqrt{2}}} = \frac{\log^{\sqrt{2}} (\log^{\sqrt{2}} + \log^{\sqrt{2}})}{\log^{\sqrt{2}} \times \log^{\sqrt{2}}} = \frac{\log^{\sqrt{2}} (\log^{\sqrt{2}} \times 2)}{\log^{\sqrt{2}} \log^{\sqrt{2}}}$$

$$= 2 \times \frac{\log^{\sqrt{2}}}{\log^{\sqrt{2}}} \times \frac{\log^{\sqrt{2}}}{\log^{\sqrt{2}}} = \frac{2 (\log^{\sqrt{2}})^2}{\log^{\sqrt{2}} \times \log^{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 (\log^{\sqrt{2}})^2}{\log^{\sqrt{2}} \times \log^{\sqrt{2}}} = \frac{\log^{\sqrt{2}} (\log^{\sqrt{2}} \times 2)}{\log^{\sqrt{2}} \times \log^{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\log^x)^{\log^x}}{\log^x \times \log^x} = \frac{(\log^x)^{\log^x}}{\log^x \times \log^x}$$

$$(\log^x)^{\log^x} (\log^x) = \log^x (\log^{x \times \log^x}) \Rightarrow \log^x = \log^{x \times \log^x}$$

$$\log^x = 0 \rightarrow \boxed{x = k^0 = 1}$$

$$\log^{x^x} = \log^{x \times \log^x}$$

$$x^x = x \times \log^x$$

$$x^x = x^x \times x^{\log^x}$$

$$x^x = x^x (\sqrt{x})^x$$

$$x^x = x^x \sqrt{x} = x^x \sqrt{x}$$