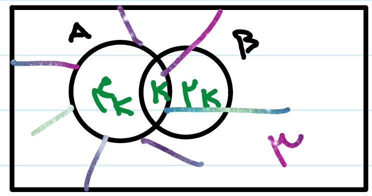
۱۱- در مجموعه‌های A و B، اگر $\frac{1}{2}n(B-A)=\frac{1}{3}n(B)=\frac{1}{7}n(A\cup B)$ و $n(A-B)=8$ و $n(A'\cap B')=3$، آن‌گاه $n(A')$ برابر است با:

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

$4K=8 \Longrightarrow \boxed{K=2}$




$n(A')=3+2K=3+4=7$

$q\neq 0$ و $a_1\neq 1$

$t_n$

در یک دنباله هندسی غیرثابت، اولین، سومین و پنجمین جمله را جملات اول، چهارم و ششم یک دنباله حسابی در نظر می‌گیریم. اگر جملهٔ اول دنباله حسابی ۵ باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

$a_n$

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $-\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{9}{5}$ ۴) $-\frac{9}{5}$

$a_1 \qquad a_3 \qquad a_5$

$a_3\times q^{-2} \qquad a_3 \qquad a_3 q^2$

$t_1 \xrightarrow{3d} t_4 \xrightarrow{2d} t_6$

$a_3-a_1=3d$

$a_3(1-q^{-2})=3d$

$a_3-a_3q^{-2}=3d \Rightarrow \frac{3d}{a_3}=1-q^{-2}$

$a_5-a_3=2d$

$\frac{2d}{a_3}=q^2-1$

$a_3q^2-a_3=a_3(q^2-1)=2d$

$\frac{3\cancel{d}}{\cancel{a_3}}$ $\quad 1-q^{-2}$

$$\frac{3}{2} = \frac{\frac{\cancel{15}}{\cancel{a_3}}}{\frac{2\cancel{d}}{\cancel{a_3}}} = \frac{1-q^2}{q^2-1} \Rightarrow 2-2q^{-2} = 3q^2-3 \Rightarrow 2-\frac{2}{q^2} = 3q^2-3$$

$$\Rightarrow 3q^2-5+\frac{2}{q^2} = \frac{3q^4-5q^2+2}{q^2} = 0$$

$$3(q^2)^2-5q^2+2=0 \Rightarrow \text{جوابها} = \begin{cases} q^2=1 \ \times \\ \boxed{q^2=\frac{2}{3}} \rightarrow q=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$t_1=a_1 \Rightarrow \quad 5=\frac{a_3}{q^2}=\frac{a_2}{\frac{2}{3}} \Rightarrow a_2=\frac{10}{3} \Rightarrow a_2-a_1=3d$$

$$-\frac{5}{3} = \frac{10}{3}-\frac{15}{3}=3d$$

$$d=\frac{-5}{9}$$

اگر $\frac{\pi}{۲} = ۱۱x$، آن‌گاه حاصل $\frac{۲\sin ۴x}{\sin ۷x} \times (\frac{\sin^۲ ۵x+\sin^۲ ۶x}{۱+\tan^۲ ۴x})$ برابر است با:

۱) $\cot ۴x$ ۲) $\sin ۸x$ ۳) $\cos ۴x$ ۴) $\cos ۸x$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin\beta=\cos\alpha \\ \sin\alpha=\cos\beta \end{cases} \Leftarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \text{ اگر}$$

$$5x+6x=11x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 6x=\cos 5x$$

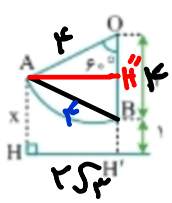
$$4x+7x=11x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 7x=\cos 4x$$

$$= \frac{\overbrace{(\cancel{\sin^2 5x+\cos^2 5x})}^{1}}{\frac{1}{\cos^2 4x}} \times \frac{2\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{\cos^{\cancel{2}} 4x \times 2\sin 4x}{\cancel{\cos 4x}}$$

$$= 2\sin 4x\cos 4x = \sin 8x$$

در هر دایره وتر متناظر با زاویه مرکزی $60^\circ$ برابر R است.

$AB=R=4$



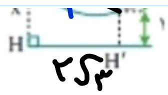

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

۱) ۲

۲) ۲/۵

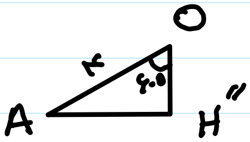
۳) ۳

۴) ۳/۵



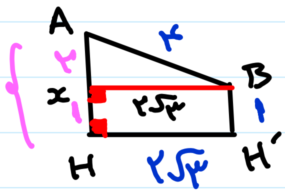
۲ (۳
۳/۵ (۴

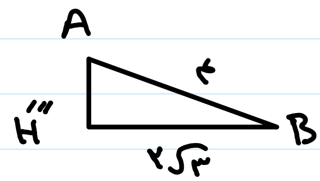
$HH' = AH''$



$AH'' = \frac{4 \times \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HH' = 2\sqrt{3}$

$x = 2+1 = 3$





$AH'' = \sqrt{16-12} = 2$

اگر برد تابع $f(x)=\sin^2 x+\cos^4 x$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$f(x) = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 - \cos^2 x + 1 = t^2 - t + 1$

$t_s = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2} = \cos^2 x \Rightarrow f(\cos^2 x = \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 =$

$-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$ min

$\cos^2 x = 1 \Rightarrow f(\cos^2 x = 1) = 1 - 1 + 1 = 1$

$\cos x = 1$ یا $-1$

بازهٔ برد $= [\frac{3}{4}, 1] \Rightarrow 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

S P $x_1$ و $x_2$ ریشه‌های f

اگر $f(x)=x^2-x-3$ و $f(x_1)=f(x_2)=0$، آن‌گاه حاصل $f(x_1+x_2)f(x_1x_2)$ برابر است با: $(x_1 \neq x_2)$

۱) $-31$ ۲) $-27$ ۳) $30$ ۴) $27$

$S = x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$ , $P = x_1 x_2 = \frac{-3}{1} = -3$

$S = x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$ , $P = x_1 x_2 = \frac{-3}{1} = -3$

$f(1) \times f(-3) = (1 \cancel{-1} - 4)(9 + \cancel{4 - 4}) = -4 \times 9 = \underline{-27}$

$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

$\cos^2 a = 1 - (\frac{1}{9}) = \frac{8}{9}$

اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - (\sin a)x - \frac{1}{4}(\cos^2 a) = 0$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه مقدار $\cos^2 a$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{7}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{3}{27}$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sin a - \frac{1}{4}\cos^2 a = 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sin a - \frac{1 - \sin^2 a}{4}\right) = 0 \quad \times 36$

$\Rightarrow \underline{16} - 24\sin a \underline{- 9} + 9\sin^2 a = 0 \Rightarrow 9\sin^2 a - 24\sin a + 7 = 0$

$\Rightarrow \sin^2 a - 24\sin a + \underbrace{7 \times 9}_{3 \times 21} = 0 \Rightarrow (\sin a - 3)(\sin a - 21) = 0$

$\sin a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ✓

$\sin a = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ غ‌ق‌ق

$\sin a < 1$

در دنبالهٔ درجه دوم $\{a_n\}$، اگر $a_1 = 0$ و $n \ge 1$ ; $a_{n+1} = 2n + a_n$، آن‌گاه جملهٔ صدم کدام است؟

۱) ۱۰۰۰۰ ۲) ۹۹۵۰ ۳) ۹۹۰۰ ۴) ۹۸۵۰

$\{a_n\} = an^2 + bn + c$

$a_1 = a + b + c = 0$

$a_2 = 2 + a_1 = 2 + 0 = 2 = 4a + 2b + c = 2$

$a_3 = 4 + a_2 = 4 + 2 = 6 = 9a + 3b + c = 6$ $\Big\} \ominus \Rightarrow 5a + b = 4$ *

$4a + 2b + c = 2 \Big\} \ldots \Rightarrow \Big\{ 3a + b = 2 \Big\} \ldots$

$$\left.\begin{array}{l}4a+2b+c=2\\ a+b+c=0\end{array}\right\}\ominus \Rightarrow 3a+b=2 \quad ** \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}3a+b=2\\ 5a+b=4\end{array}\right\}\Rightarrow 2a=2 \quad \boxed{a=1}$$

$c=0$ $\quad \boxed{b=-1}$

$$a_n = n^2 - n = n(n-1) \Rightarrow$$

$$a_{100} = 100(99) = 9900$$

$(f(x))^2 \geq 0 \Rightarrow 4x+1 \geq 0 \to x \geq -\frac{1}{4}$

اگر $f(x)=\begin{cases}x+۲ & ; x\geq ۲\\ ۲x-۳ & ; x<۲\end{cases}$، آن‌گاه جواب معادلهٔ $(f(x))^۲ = ۴x+۱$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۲}$ ۳) $۳+\sqrt{۳}$ ۴) $۳-\sqrt{۳}$

$$\begin{cases} x\geq 2: & (x+2)^2 = 4x+1 \to x^2+\cancel{4x}+4 = \cancel{4x}+1 \Rightarrow x^2=-3 \ \times \\ x<2: & (2x-3)^2 = 4x+1 \to 4x^2-12x+9 = 4x+1 \Rightarrow 4x^2-16x+8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{4}(x^2-4x+2)=0 \to \Delta = 16-8 = 8 \to \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = \underbrace{2+\sqrt{2}>2}_{\text{غ ق ق}}, \quad x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$$

۱۲۰- اگر $f(x)=\frac{۹}{۱+x^۹}+\frac{۷}{۱+x^۷}+\frac{۵}{۱+x^۵}+\frac{۳}{۱+x^۳}+\frac{۱}{۱+x}$، آن‌گاه حاصل $f(\sqrt{۲}-۱)+f(\sqrt{۲}+۱)$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۰

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$f(\sqrt{2}+1) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\cancel{1+\frac{1}{x}}\ \frac{x+1}{x}} + \frac{3}{\cancel{1+\frac{1}{x^3}}\ \frac{x^3+1}{x^3}} + \frac{5}{\cancel{1+\frac{1}{x^5}}\ \frac{x^5+1}{x^5}} + \frac{7}{1+\frac{1}{x^7}} + \frac{9}{1+\frac{1}{x^9}}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1x}{\ } + \frac{3x^3}{\ } \quad 5x^5 \quad 7x^7 \quad 9x^9$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1x}{1+x}+\frac{3x^3}{1+x^3}+\frac{5x^5}{1+x^5}+\frac{7x^7}{1+x^7}+\frac{9x^9}{1+x^9}$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{1+x}}+\frac{3\cancel{(x^3+1)}}{\cancel{x^3+1}}+\frac{5\cancel{(x^5+1)}}{\cancel{1+x^5}}+\frac{7\cancel{(x^7+1)}}{\cancel{1+x^7}}+\frac{9\cancel{(x^9+1)}}{\cancel{x^9}}=$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+3+5+7+9=25$$

اگر $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+m(\sin^4 x+\cos^4 x)$ تابعی ثابت باشد، آن‌گاه $f(1403)$ کدام است؟

۱) ~~۱۴۰۳~~ ۲) ~~$-۱۴۰۳$~~ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$f(x)=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+m-2m\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$f(x)=$ثابت $\Rightarrow$ $-3\cancel{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-2m\cancel{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=0$

$$-3-2m=0\rightarrow \boxed{m=-\frac{3}{2}}$$

$$f(x)=1+m=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$4^{\frac{n}{2}}=(4^{\frac{1}{2}})^n=(\sqrt{4})^n=2^n$$

اگر $f(x)=4^x$ و $g(x)=4x^2$ و $\frac{f(n)-g(n)}{f(\frac{n}{2})+2n}=16-2n$، آن‌گاه مقدار $n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\frac{4^n-4n^2}{4^{\frac{n}{2}}+2n}=\frac{4^n-4n^2}{2^n+2n}=\frac{(2^n)^2-(2n)^2}{2^n+2n}=\frac{(2^n-2n)\cancel{(2^n+2n)}}{\cancel{2^n+2n}}$$

$$=2^n-\cancel{2n}=16-\cancel{2n}\Rightarrow\boxed{n=4}$$

$\log_b a^n = n\log_b a$

به ازای کدام مقدار x، اعداد ۱ ، $\log_4^{(2^{3-x}+4)}$ ، $\log_2^{3((2^{x+1})-1)}$، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی‌اند؟

واسطه

۱) $2-\log_2^3$ ۲) $\log_3^2$ ۳) $\log_2^3$ ۴) $2-\log_3^2$

$1+\log_2^{3((2^{x+1})-1)} = 2\log_{4=2^2}^{(2^{3-x}+4)}$

واسطه‌ی بی برقرار است ⇐

$\underline{\log_2^2+\log_2^{3(2^{x+1}-1)}} = \log_2^{6(2^{x+1}-1)} = \cancel{\frac{2}{2}}\log_2^{2^{3-x}+4}$

$\Rightarrow \underbrace{6\times(2\times 2^x-1)} = (8\times\frac{1}{2^x}+4) \Rightarrow 2^x=t$

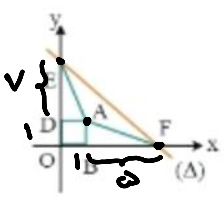
$12\times t-6=\frac{8}{t}+4 \rightarrow 12t-10-\frac{8}{t}=\frac{12t^2-10t-8}{t}=0$

$12t^2-10t-8=0 \longrightarrow t^2-10t-\underbrace{8\times12}_{6\times16}=0 \Rightarrow (t+6)(t-16)=0$

$$\begin{cases} t=2^x=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2} & \text{غ‌ق‌ق} \\ t=2^x=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}\checkmark \end{cases} \Longrightarrow 2^x=\frac{4}{3} \xrightarrow{\log_2} \log_2^{2^x}=x=\log_2^{\frac{4}{3}}$$

$\Rightarrow x=\log_2^4-\log_2^3=2-\log_2^3$

در شکل مقابل، اگر معادلهٔ خط Δ به صورت $4x+3y-24=0$ و مساحت مربع OBAD برابر یک واحد مربع باشد، مساحت مثلث AEF کدام است؟




$F(6,0)$ و $E(0,8)$

$\begin{cases} OF=6 \\ OD=1 \end{cases} \Rightarrow BF=5$ $\left.\begin{matrix} OE=8 \\ OD=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow DE=7$

۱) ۱۸
۲) ۱۷
۳) ۱۶
۴) ۱۵

$A=(1,1)$

روش سریع

$-3\ 4$

روش سریع:

$$۲S = \left| \; \cdots \; \right| = \left| \overset{-۳۴}{\underbrace{۰-۴۸}_{-۴۸} + ۶ - ۰ + ۸ - ۰} \right| = ۲S = ۳۴ \rightarrow \boxed{S = ۱۷}$$

روش معمولی:

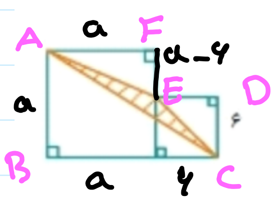
$$S_{O\hat{E}} = S_{OBAD} + S_{B\hat{A}F} + S_{D\hat{A}E} + S_{A\hat{E}F}$$

$$\frac{۱}{۲}\times۶\times۸ = ۱ + \frac{۱}{۲}\times۱\times۵ + \frac{۱}{۲}\times۱\times۷ + S_{AEF}$$

$$۲۴ = ۱ + \overset{۶}{\cancel{\frac{۵}{۲} + \frac{۷}{۲}}} + S_{A\hat{E}F} \Rightarrow ۲۴ = ۷ + S_{A\hat{E}F}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{A\hat{E}F} = ۱۷}$$

۱۳۵ در شکل مقابل، مساحت مثلث هاشور خورده کدام است؟ (چهارضلعی‌ها مربع می‌باشند.)




۱) ۲۰
۲) $\boxed{۱۸}$ ✓
۳) ۱۷
۴) ۱۶

$$S_{\text{کل}} = a^۲ + ۳۶ = S_{A\hat{B}C} + S_{A\hat{F}E} + S_{E\hat{D}C} + S_{A\hat{E}C}$$

$$a^۲ + ۳۶ = \frac{a(a+۶)}{۲} + \frac{a(a-۶)}{۲} + \frac{۶\times۶}{۲} + S_{A\hat{E}C}$$

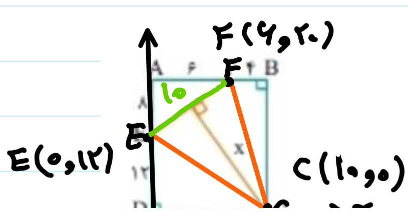
$$a^۲ + ۳۶ = \frac{a^۲ + \cancel{۶a} + a^۲ \cancel{- ۶a} + ۳۶}{۲} + S_{A\hat{E}C}$$

$$a^۲ + ۳۶ = \frac{۲a^۲ + ۳۶}{۲} + S_{A\hat{E}C}$$

$$\cancel{a^۲} + ۳۶ = \cancel{a^۲} + ۱۸ + S_{A\hat{E}C} \Rightarrow \boxed{S_{A\hat{E}C} = ۱۸}$$

فیثاغورس:

$FE = ۱۰$

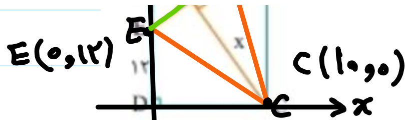



$$S_{E\hat{F}C} = S$$

۱۳۶ در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۱۵/۱
۳) $\boxed{۱۵/۲}$ ✓

$PE = 10$



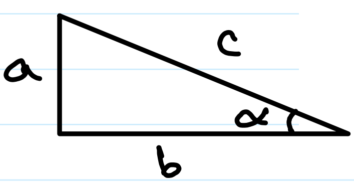

۱۵/۱ (۲
۱۵/۲ (۳ ✓
۱۵/۳ (۴

$$2S = \left| \begin{matrix} 0 & 6 & 10 & 0 \\ 12 & 20 & 0 & 12 \end{matrix} \right| = \left| 0 - \cancel{72+0} - \cancel{200} + \cancel{120} - 0 \right| = 152$$

$-152$ ، $80$

ارتفاع

$$\Rightarrow S = S_{\overset{\triangle}{EFC}} = 76 = \frac{1}{2} x \times 10 \Rightarrow x = \frac{2 \times 76}{10} = \frac{152}{10} = 15/2$$




اگر طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی دهند و α کوچک‌ترین زاویهٔ این مثلث باشد، معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن sin α و cos α باشند، کدام است؟

$(a < b < c)$

۱) $\cancel{25x^2 + 35x + 12 = 0}$ $\quad S < 0$

۲) $25x^2 - 35x + 12 = 0$ ✓ $\quad S > 0$ ✓ $\quad P = \frac{12}{25}$ $\quad S = -\frac{-35}{25}$

۳) $\cancel{12x^2 - 35x + 25 = 0}$ $\quad S > 0$ $\quad S^2 \neq 2P + 1$

۴) $\cancel{12x^2 + 35x + 25 = 0}$ $\quad S < 0$

$a^2 + b^2 = c^2$ و واسطه حسابی : $a + c = 2b$

$S = \sin\alpha + \cos\alpha > 0$ , $P = \sin\alpha \cos\alpha > 0 \Leftarrow \sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0 \Leftarrow$ قطعاً $\alpha < 90°$

$$S^2 - 2P = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \Rightarrow S^2 = 2P + 1$$

$$S^2 = \frac{\cancel{35 \times 35}}{\cancel{25 \times 25}} = 2P + 1 = \frac{2 \times 12}{25} + 1$$

گزینهٔ ۲) : ✓

$$\Rightarrow \frac{49}{25} = \frac{24}{25} + \frac{25}{25} = \frac{49}{25}$$

گزینهٔ ۳ : $S^2 \neq 2P + 1$ ✗

$5^2 \neq 24+1$ گزینهٔ ۳:

در دنبالهٔ $a_n = \log_{(n+2)}^{(n+3)}$، حاصل‌ضرب ۷۸ جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

$$\begin{cases} \log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a \\ \log_b^a \times \log_a^c = \log_b^c \end{cases}$$

$$= a_1 a_2 a_3 \cdots a_{78} = \log_3^4 \times \log_4^5 \times \log_5^6 \times \cdots \times \log_{79}^{80} \times \log_{80}^{81} = \log_3^{81}$$

$$= \log_3^{3^4} = 4\log_3^3 = 4$$

اگر $x^{\log_3^4} = 27$، آن‌گاه حاصل $x^{(\log_3^4)^2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) ۶۴ ۴) ۸۱

$$x^{\log_3^4} = 27 \xrightarrow{\text{از طرفین } \log_3 \text{ می‌گیریم}} \log_3^{x^{(\log_3^4)}} = \log_3^{27} = \log_3^{3^3} = 3\log_3^3 = 3$$

$$\Rightarrow (\log_3^4) \times (\log_3^x) = 3 \quad *$$

$$x^{(\log_3^4)^2} = \square \xrightarrow{\text{از طرفین } \log_3 \text{ می‌گیریم}} \log_3^{x^{(\log_3^4)^2}} = \log_3^{\square}$$

$$64 = 4^3 = \square$$

$$(\log_3^4)^2 \times (\log_3^x) = \log_3^{\square}$$

$(\log_3^4)^1 \times (\log_3^x) = \log_3^{\square}$

$(\log_3^4)^1 \times (\log_3^4) \times (\log_3^8) = 3\log_3^4 = \log_3^{\boxed{\phantom{0}}} \Rightarrow \log_3^{4^3} = \log_3$

$\log_3^x = t \quad , \quad \log_3^{x^2} = 2\log_3^x = 2t$

۱۳۰-حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(\log_3^x)^2 - \log_3^{x^2} + \log_2^{\frac{1}{8}} = 0$ کدام است؟

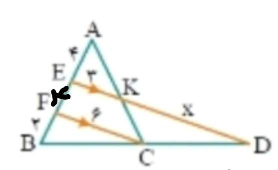
$\frac{1}{8} = 2^{-3}$

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

$= t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 = \log_3^x \Rightarrow 3^{-1} = \boxed{\frac{1}{3} = x_1} \\ t = \frac{-c}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 = \log_3^x \Rightarrow \boxed{x_2 = 27} \end{cases}$

$P = x_1 x_2 = \frac{1}{3} \times 27 = \underline{9}$

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟ (ED || FC)




۱) ۱۵
۲) ۱۴
۳) ۱۳
۴) ۱۲

$\triangle AFC$: $EK \parallel FC \Rightarrow$ تالس جزء بکل $= \frac{AE}{AF} = \frac{EK}{FC}$

$\Rightarrow \frac{4}{4+FE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{FE = 4}$

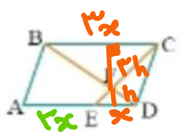
$BF - FC$

$\overset{\triangle}{BED}$ : $FC \parallel ED \Rightarrow$ تالس جزء به کل $= \frac{BF}{BE} = \frac{FC}{ED}$

$= \frac{2}{6} = \frac{6}{ED} \Rightarrow ED = 18 \rightarrow ED = x + 3 = 18 \rightarrow \underline{x = 15}$

در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و مساحت مثلث‌های $\overset{\triangle}{FBC}$ و $\overset{\triangle}{FED}$ به ترتیب ۱۸ و ۲ واحد مربع است. مساحت چهارضلعی AEFB کدام است؟

اضلاع روبروی هم برابرند




۱) ۲۰

۲) ۲۱

۳) ۲۲ ✓

۴) ۲۳

$\overset{\triangle}{FED} \sim \overset{\triangle}{FBC} \overset{k \text{ باسبت تشابه}}{=} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{BFC}}}{S_{\overset{\triangle}{FED}}} = \frac{18}{2} = k^2 \Rightarrow \boxed{k = 3}$

$S_{\overset{\triangle}{FED}} = \frac{1}{2} x h = \frac{xh}{2} = 2 \Rightarrow \underline{xh = 4}$ $\quad S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{1}{2} 3x \times 4h = 6xh = 24$

$S_{AEFB} = S_{\overset{\triangle}{ABD}} - S_{\overset{\triangle}{FED}} = 24 - 2 = \underline{22}$

اگر $32! = \frac{n!}{2+4+6+\dots+66}$، آن‌گاه مقدار n کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴ ✓

$2 + 4 + 6 + \dots + 66 \Rightarrow$ جمع از ۱ تا ۶۶ $= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{66 \times 67}{2} = 33 \times 67$

جمع از ۱ تا ۶۵ فردها = ؟ $\quad n^2 = \left(\frac{66}{2}\right)^2 = 33\times 33$

جمع از ۲ تا ۶۶ زوج‌ها: $33\times 67 - 33\times 33 = 33\times(67-33) = 33\times 34$

$$\frac{n!}{33\times 34} = 32! \Rightarrow n! = 34\times 33\times 32! = 34! \Rightarrow \boxed{n=34}$$

تعداد اعداد ۵ رقمی با ارقام متمایز و فاقد ۳ و ۸ و بزرگ‌تر از ۶۴۰۰۰ برابر است با:

۱) ۲۱۶۰ ۲) ۱۳۲۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۲۲۸۰

$\cancel{0}\ \ \cancel{1}\ \ \cancel{2}\ \ \cancel{3}\ \ \cancel{4}\ \ \cancel{5}\ \ \cancel{6}\ \ \cancel{7}\ \ \cancel{8}\ \ \cancel{9}$

یا →

$$\underset{7,9}{2}\times 7\times 6\times 5\times 4$$

$+$

$$\underset{6}{1}\times \underset{4,5,7,9}{4}\times 6\times 5\times 4$$

$$= 6\times 5\times 4\,(\overbrace{14+4}^{18}) = 18\times \overbrace{6\times 5\times 4}^{120} = \frac{2160}{18\times 120}$$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

مفهوم مستقل

$P(B)=۰/۷$ $\quad$ $P(A)=۰/۶$

فرض کنید در یک سال، احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۶ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۷ باشد، با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان آسیا خواهد شد؟

$\cup$

۱) ۰/۸۵    ۲) ۰/۸۶    ۳) ۰/۸۷    ۴) ۰/۸۸ ✓

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۶+۰/۷-۰/۶\times ۰/۷$$

$$=۱/۳-۰/۴۲=۰/۸۸$$

در نقاط مرزی

اگر توابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۲\ ; & x\leq a\\ x-۱\ ; & x>a\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}ax^{۲}+۱\ ; & x\leq ۱\\ ۳x+b\ ; & x>۱\end{cases}$ در هر نقطه دارای حد باشند، حاصل ab کدام است؟

۱) ۱۵ ✓    ۲) ۱۲    ۳) ۱۰    ۴) ۹

$$\lim_{x\to a^-} f=\lim_{x\to a^+} f=a-۱=۲a+۲$$

$$\boxed{-۳=a}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} g=\lim_{x\to ۱^+} g=۳+b=a+۱=-۲$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-۵}$$

$$ab=-۳\times -۵=۱۵$$

اگر $f(x)$ مساحت مستطیلی به ابعاد $\frac{x^2-9}{x+1}$ و $\frac{x+4}{x-3}$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to 3} f(x)$ برابر است با:

۱) ۹ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳/۵

طول عرض

$$S = f(x) = \frac{(x+4)\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x+1)} = \frac{(x+4)(x+3)}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{7\times 6}{4} = \frac{42}{4} = \frac{21}{2} = 10/5$$

$$\boxed{a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}}$$

حاصل $\lim_{x\to \log_3^2} \frac{9^x+2(3^{x+1})-16}{9^x-4}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

$9^x = (3^x)^2$ ✓ $\quad 3^{x+1} = 3\times 3^x$

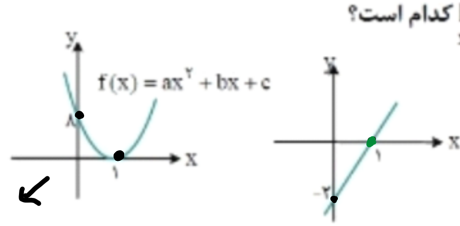
$$\lim_{x\to \log_3^2} \frac{(3^x)^2 + 6\times 3^x - 16}{(3^x)^2 - 4} = \frac{(3^x+8)\cancel{(3^x-2)}}{\cancel{(3^x-2)}(3^x+2)} = \lim_{x\to \log_3^2} \frac{3^x+8}{3^x+2}$$

$+8 \times -2$

$$= \frac{3^{\log_3^2}+8}{3^{\log_3^2}+2} = \frac{2^{\log_3^3}+8}{2^{\log_3^3}+2} = \frac{2+8}{2+2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{}{3^{\log_3 2} + 2} = \frac{}{2\log_3^3 + 2} = \frac{}{2+2} = \frac{}{4} = \frac{}{2}$$

اگر نمودار توابع f و g به صورت شکل مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{g^2(x)}$ کدام است؟




۱) −۱

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

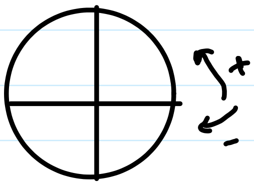
$g(x) = 2(x-1)$

$g^2(x) = (2(x-1))^2 = 4(x-1)^2$

$f(x) = a(x-1)^2 \Rightarrow f(0) = a(0-1)^2 = a = 8$

$\Rightarrow f(x) = 8(x-1)^2$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g^2(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{8\cancel{(x-1)^2}}{4\cancel{(x-1)^2}} = 2$$




۱۴۰- با فرض $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$، اگر $7\sin^2(x-2\pi) - 3\cos(\frac{3\pi}{2}-x)\sin(\frac{\pi}{2}+x) = 2$ باشد، حاصل $\sin x \cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{29}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ~~۳) $\frac{1}{5}$~~ ۴) $\frac{10}{29}$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$7\sin^2(x) + 3\sin(x) \times \cos(x) = 2$

$7\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 2 \rightarrow \sin x \cos x = \frac{2 - 7\sin^2 x}{3}$

گزینه‌ی سوم) غلط
$\frac{1}{5} = \frac{2-7\sin^2 x}{3} \Rightarrow \frac{3}{5} = 2 - 7\sin^2 x \Rightarrow \frac{\cancel{-7}^{\,1}}{5} = -\cancel{7}\sin^2 x$

$\Rightarrow \sin x = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ و $\cos x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{2}{5}$

گزینه‌ی ۴) $\frac{10}{29} = \frac{2-7\sin^2 x}{3} \Rightarrow \frac{30}{29} = 2 - 7\sin^2 x \Rightarrow \frac{\cancel{-28}^{\,4}}{29} = -\cancel{7}\sin^2 x$

$\Rightarrow \sin x = \frac{-2}{\sqrt{29}}$ و $\cos x = \frac{-5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{10}{29}$ ✓