

1- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x - \pi \tan x$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول α برابر است.

مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

$$f'(x) = 1 - \pi(1 + \tan^2 x)$$

$$f'(\alpha) = \frac{f(\frac{\pi}{4}) - f(0)}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{(\frac{\pi}{4} - \pi) - 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{3\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = -3$$

$$1 - \pi(1 + \tan^2 x) = -3 \rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{4}{\pi} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{\pi}{4} \quad | \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

2- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x + \sqrt{3x+1}$ در بازه $[0, 1]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در α برابر است. $f(\alpha)$ چه عددی است؟

$$f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{3 - 1}{1} = 2, \quad f'(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$1 + \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = 2 \rightarrow \sqrt{3x+1} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{5}{12}, \quad f(\frac{5}{12}) = \frac{5}{12} + \frac{3}{2} = \frac{23}{12}$$

3- تابع $f(x) = x|x| + \cos 2x$ دارای چند نقطه بحرانی است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \cos 2x & x \geq 0 \\ -x^2 + \cos 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2\sin 2x & x \geq 0 \\ -2x - 2\sin 2x & x < 0 \end{cases} = 0$$

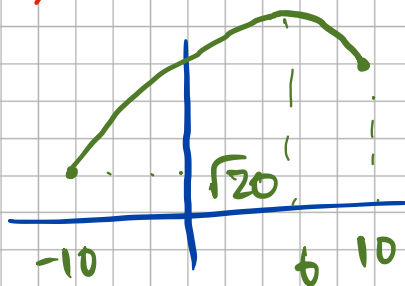
$$f'_+(0) = 0, \quad f'_-(0) = 0 \rightarrow f'(0) = 0$$

4- تعداد اعداد صحیحی که در برد تابع $f(x) = \sqrt{10-x} + 2\sqrt{x+10}$ قرار می‌گیرند، با کدام گزینه برابر است؟

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{10-x}} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+10}} = 0 \rightarrow \sqrt{10+x} = 2\sqrt{10-x}$$

$$10+x = 40 - 4x \rightarrow x = 6$$

$$D_f = [-10, 10]$$



$$f(6) = 10$$

$$R_f = [\sqrt{20}, 10]$$

$$4, \dots, 10 \rightarrow 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

۵- مقادیر min و max مطلق تابع $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + k$ در بازه $[-1, 2]$ قرینه هم هستند. کدام گزینه k را نشان می دهد؟

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 0 \leftarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{matrix}$$

$f(0) = k$ $f(1) = k+9$ $f(2) = k+9 - k \rightarrow k = \frac{-9}{2} = -4.5$

۶- تابع $f(x) = \cos 2x - 4 \sin x$ با دامنه $(0, 2\pi)$ را در نظر بگیرید، در کدام بازه $f(x)$ اکیداً نزولی و $f'(x)$ اکیداً صعودی است؟

$$f'(x) < 0 \rightarrow -2 \sin 2x - 4 \cos x < 0 \rightarrow \sin 2x > -2 \cos x$$

$$f''(x) > 0 \rightarrow -4 \cos 2x + 4 \sin x > 0 \rightarrow \sin x > \cos 2x$$

$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > -1 \checkmark, \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \checkmark$
 $x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > 1 \times$

۷- اگر $A(2, a)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{2x^2 + bx + 1}{x-1}$ باشد، حاصل جمع مختصات نقطه اکسترمم دیگر تابع کدام است؟

$$\frac{2x^2 + bx + 1}{x-1} = \frac{4x + b}{1} \rightarrow \frac{8 + 2b + 1}{1} = \frac{8 + b}{1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x-1} = \frac{4x-1}{1} \rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 2x^2 - x + 1$$

$$2x^2 - 4x = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow f(0) = -1$$

۸- تابع $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ دارای اکسترمم نسبی است. نوع و مقدار تابع در اکسترمم نسبی به ترتیب کدام است؟

- (۱) max نسبی و -۴ (۲) max نسبی و ۸ (۳) min نسبی و ۸ (۴) min نسبی و ۱۲

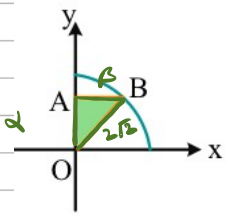
$$f'(x) = 2x - \frac{-1(a)}{x^2} = 2x + \frac{a}{x^2} = 0 \rightarrow 4 + \frac{a}{4} = 0$$

$$a = -16$$

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}, x=2$$

$$f(2) = 4 - \frac{-16}{2} = 12$$

9- شعاع ربع دایره مقابل برابر $2\sqrt{2}$ می باشد. بیشترین محیط مثلث قائم الزاویه OAB کدام است؟



$$4 + 2\sqrt{2}$$

- (1) $4\sqrt{2}$
- (2) $4 + 2\sqrt{2}$
- (3) $2 + 4\sqrt{2}$
- (4) $2 + 2\sqrt{2}$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8 \rightarrow \beta = \pm \sqrt{8 - \alpha^2}, \beta > 0, \alpha > 0$$

$$P = \alpha + \beta + 2\sqrt{2} = \alpha + \sqrt{8 - \alpha^2} + 2\sqrt{2} \leftarrow = 2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$P' = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{8 - \alpha^2}} = 0 \rightarrow \alpha = \sqrt{8 - \alpha^2} \rightarrow \alpha^2 = 4 \rightarrow \alpha = 2$$

10- کمترین فاصله نقاط روی نمودار $f(x) = \frac{25}{8x+2}$ تا مبدأ مختصات چه عددی است؟

- (1) $2/5$
- (2) $\sqrt{3/5}$
- (3) $2/3$
- (4) $\sqrt{4/5}$

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{8\alpha+2}} \quad \sqrt{1 + \frac{25}{10}} = \sqrt{3.5} = \sqrt{7/2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$AO = \sqrt{\alpha^2 + \frac{25}{8\alpha+2}} = \sqrt{\frac{8\alpha^3 + 2\alpha^2 + 25}{8\alpha+2}}$$

$$\frac{8\alpha^3 + 2\alpha^2 + 25}{8\alpha+2} = \frac{b\alpha^2 + a}{2} \rightarrow 48\alpha^3 + 20\alpha^2 + 2\alpha = 16\alpha^3 + 4\alpha^2 + 50$$

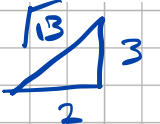
$$\rightarrow 16\alpha^3 + 8\alpha^2 + \alpha - 25 = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

11- در مثلث ABC با محیط $11 + \sqrt{13}$ ، اگر $\sin \hat{C} = 0.6$ و $\tan \hat{B} = 1/5$ باشد، آن گاه مساحت مثلث چقدر است؟

- (1) 6
- (2) 9
- (3) 12
- (4) 18

$$\hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$\sin \hat{A} = \sin(\pi - \hat{B} - \hat{C}) = \sin(\hat{B} + \hat{C}) = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{5} = \frac{3.6}{\sqrt{13}}$$



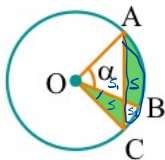
$$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{11 + \sqrt{13}}{\frac{3.6}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} + 0.6} = \frac{\sqrt{13}(11 + \sqrt{13})}{0.6(11 + \sqrt{13})} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\alpha = \frac{5\sqrt{13}}{3} \times \frac{3.6}{\sqrt{13}} = 6, b = 5 \rightarrow S = \frac{1}{2} \times 30 \times 0.6 = 9$$



12- در دایره مثلثاتی مقابل، مساحت نواحی رنگی با هم برابر است. اگر زاویه AOC برابر 30° باشد، مقدار زاویه α بر حسب رادیان چقدر است؟



- (1) $0/2$
- (2) $0/3$
- (3) $0/4$
- (4) $0/5$

$$S + S_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \rightarrow \frac{\pi}{6} - \alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$$

$$S_{AOC} + S + S_2 = \frac{\pi}{12}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S + S_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}$$

۱۳- اگر $3\sin\theta + 2\cos\theta = 2$ باشد، حاصل $25\cos 2\theta + 24\sin\theta$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

۳ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

$$25(1 - 2\sin^2\theta) + 24\sin\theta$$

$$25 - 50\sin^2\theta + 24\sin\theta$$

$$25 - 2(25\sin^2\theta - 12\sin\theta)$$

$$= 25 - 2(12) = 1$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$3\sin\theta \pm 4\sqrt{1 - \sin^2\theta} = 2$$

$$16(1 - \sin^2\theta) = 4 + 9\sin^2\theta - 12\sin\theta$$

$$25\sin^2\theta - 12\sin\theta - 12 = 0$$

$$25\sin^2\theta - 12\sin\theta = 12$$

$$\left(\frac{t_{2\alpha} - 1}{1 + t_{2\alpha}}\right)^2 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$$

۱۴- اگر α زاویه‌ای حاده و $\frac{2\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)}{2\cos(\pi + 2\alpha) - \sin(2\alpha - 2\pi)} = \frac{5}{11}$ باشد، حاصل $\tan^2(\alpha + \frac{5\pi}{4})$ کدام است؟

$\frac{1}{9}$ (۴) ✓

$$\frac{2\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)}{2\cos(\pi + 2\alpha) - \sin(2\alpha - 2\pi)} = \frac{5}{11}$$

۹ (۳)

۴ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$$\frac{-2\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + \cos(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha)}{2\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(2\pi - 2\alpha)}$$

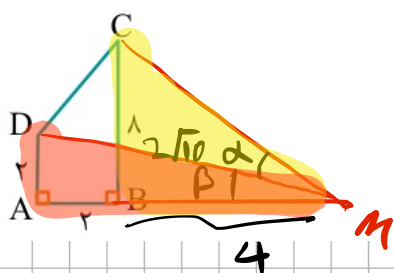
$$= \frac{-2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{-2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$$

$$= \frac{-2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{-2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$$

$$\frac{t_{2\alpha} - 2}{-t_{2\alpha} - 2} = \frac{5}{11} \rightarrow \frac{t_{2\alpha} - 2}{-4} = \frac{5}{16 - 4} \rightarrow t_{2\alpha} = \frac{3}{4}$$

$$t_{2\alpha} = \frac{2t_{\alpha}}{1 - t_{\alpha}^2} = \frac{3}{4} \rightarrow 1 - x^2 = \frac{3}{2}x \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

۱۵- در دوزنقه شکل مقابل، ضلع AB را از طرف B به اندازه دو برابر امتداد می‌دهیم تا به نقطه M برسیم. اگر زاویه بین MD و MC باشد، مقدار $\sin\alpha$ چقدر است؟



$\frac{2\sqrt{2}}{10}$ (۲)

$\frac{2\sqrt{2}}{5}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۱)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$$t_{\alpha + \beta} = 2 = \frac{t_{\alpha} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{t_{\alpha}}{3}} = \frac{3t_{\alpha} + 1}{3 - t_{\alpha}} = 2$$

$$6 - 2t_{\alpha} = 3t_{\alpha} + 1 \rightarrow t_{\alpha} = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

۱۶- اگر $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ و $f(x) = \frac{ax+b}{3x+[-x]}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ کدام است؟

-۳ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$2a + b = 0$

$$\frac{a+b}{3-1} = \frac{a+b}{2} = 2 \rightarrow a+b = 4 \rightarrow a = -4, b = 8$$

$$f(x) = \frac{-4x + 8}{3x + 6 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{12}{-3 + 0} = -4$$

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} - 2a}{3x + b}$ برابر $\frac{1}{b}$ است. مقدار a کدام است؟

$$\frac{a}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 1} = \frac{+1}{3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 1} = \frac{-1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{1}} = \frac{1}{12} = \frac{-1}{a} \rightarrow \underline{a = -12}$$

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 3}{1 + \cos 2x}$ برابر کدام است؟

$$\frac{(\cancel{\sin x} - 1)(2\sin x + 3)}{2(1 - \cancel{\sin x})(1 + \sin x)} = \frac{2\sin x + 3}{-2(1 + \sin x)} = \frac{5}{-2 \times 2} = -\frac{5}{4}$$

۱۹- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{fx^2 + mx + m - 4}}{|x^2 - a^2|}$ در $\mathbb{R} - \{a\}$ پیوسته است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ باشد، مقدار b کدام است؟

$$m^2 - 16(m - 4) \leq 0$$

$$m^2 - 16m + 64 \leq 0$$

$$(m - 8)^2 \leq 0$$

$$\underline{m = 8}$$

$$f(x) = 2 \left| \frac{x+1}{x^3+1} \right| = \frac{2}{|x^2+1-x|} = \frac{2}{x^2-x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{2}{3} = f(b) = \frac{2}{b^2-b+1}$$

$b^2 - b + 1 = 3$
 $b^2 - b - 2 = 0$
 $b = -1$

۲۰- تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2} - \log_2(2+x) \right]$ در بازه $(0, a)$ پیوسته است. حداکثر مقدار a کدام است؟ [] علامت جزء صحیح است.

$$\frac{3}{2} - \log_2(x+2) = k \rightarrow \log_2(x+2) = k - 1.5 \rightarrow x+2 = 2^{k-1.5}$$

k	0	1	2	3	4
x	2	$\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$	$\sqrt{2} - 2$	$\sqrt{8} - 2$	$\sqrt{32} - 2$
			⊖	⊕	

○ ————— ○
 ○ ————— ○ $2\sqrt{2} - 2$