

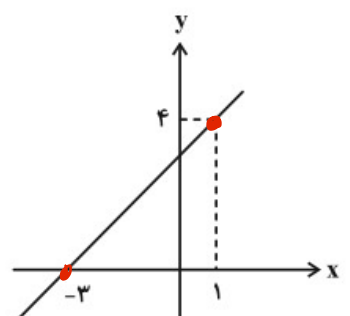
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x)}{2x} = \frac{4f'(1) - 4g'(1)}{2} = 120 \rightarrow \underline{f'(1) - g'(1) = 60}$

۱- در دو تابع مشتق پذیر  $f$  و  $g$  داریم:  $f(1) = g(1) = 2$  اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - g^2(x)}{x^2 - 1} = 120$  باشد، مشتق تابع  $\frac{f}{g}$  در  $x=1$  کدام است؟

$\frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$

۱۲۰ (۴)	۶۰ (۳)	۳۰ (۲) ✓	۱۵ (۱)
---------	--------	----------	--------

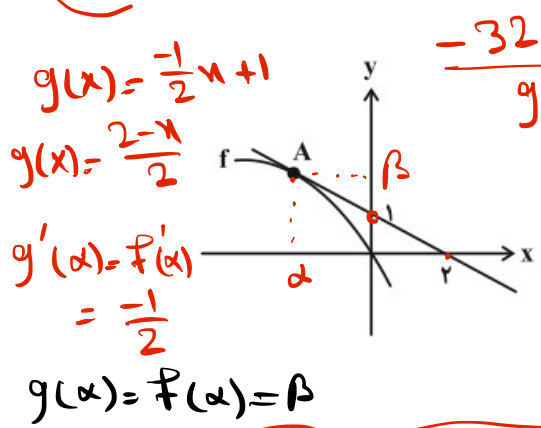
۲- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. مشتق تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$  در  $x=1$  کدام است؟



$m = \frac{4 - 0}{1 - (-3)} = 1, y = x + 3 = f(x)$   
 $f(1) = 4, f'(1)$

$g'(x) = \frac{(\frac{x}{f(x)})'}{2\sqrt{\frac{x}{f(x)}}} = \frac{f(x) - x f'(x)}{2f^2(x)\sqrt{\frac{x}{f(x)}}}$   
 $g'(1) = \frac{4 - 1(1)}{2(16)\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{16}$

۳- مطابق شکل زیر، تابع خطی  $y = g(x)$  در  $x = x_A$  بر نمودار تابع  $f$  مماس است. اگر شیب خط مماس بر نمودار تابع  $\frac{32}{g} + f^2$  در



$\frac{-32g'(\alpha)}{g^2(\alpha)} + 2f(\alpha)f'(\alpha) = -3$   
 $\frac{16}{\beta^2} + (-\beta) = -3 \rightarrow -16 + \beta^3 = -3\beta^2$   
 $\beta^3 - 3\beta^2 - 16 = 0$   
 $64 - 48 - 16 = 0$   
 $8 - 12 - 16 \neq 0$   
 $27 - 27 - 16 \neq 0$

۴- تابع  $f(x) = \sin x - \cos x$  مفروض است. برد تابع  $(f')^2 + f \cdot f''$  کدام است؟

$(f \cdot f')' \rightarrow y = -2(-\sin 2x)$   
 $f'(x) = \sin x + \cos x$

۵- اگر  $f(x) = \tan \frac{x}{2}$  باشد، در کدام طول نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f''$  متقاطع اند؟

$f = f''$   
 $\frac{5\pi}{2}$  (۳) ✓     $\frac{4\pi}{3}$  (۲)     $-\frac{\pi}{6}$  (۱)

$f' \cdot f = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$   
 $= -(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) = -\cos 2 \cdot \frac{x}{2}$   
 $f'' = 0 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 + \tan^2 \frac{x}{2})$   
 $\frac{1}{2} \tan^2 \frac{x}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \tan^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} = \tan \frac{x}{2}$

$\rightarrow \frac{1}{2} \tan^3 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \rightarrow \tan \frac{x}{2} (\tan^2 \frac{x}{2} - 1) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}(x^2+1)}{2x+1}$$

۶- آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{2x+1}}$  در بازه  $[0, 12]$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در  $x=4$  بیشتر است؟

$$\frac{f(12) - f(0)}{12 - 0} = \frac{\frac{145}{5} - 1}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

$$f'(4) = \frac{8\sqrt{9} - \frac{1}{3}(17)}{9} = \frac{24 - \frac{17}{3}}{9} = \frac{72 - 17}{27} = \frac{55}{27}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{55}{27} = \frac{63 - 55}{27} = \frac{8}{27}$$

۷- مشتق تابع  $f(x) = \left(\frac{2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{3x-1}}\right)^3$  در  $x=3$  کدام است؟

$$f'(x) = 3 \left(\frac{2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{3x-1}}\right)^2 \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}) - \frac{1}{3\sqrt[3]{(3x-1)^2}}(2+\sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}\right)$$

$$f'(3) = 3 \left(\frac{4}{2}\right)^2 \left(\frac{\frac{1}{4}(2) - \frac{1}{4}(4)}{4}\right) = 12 \times \left(\frac{\frac{1}{2} - 1}{4}\right) = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$$

۸- اگر  $f(x) = \log_2(2-x^2) - \log_2(1+x^2)$  و  $g(x) = 2^x$  باشد، حاصل عبارت  $f'(1)g'(-1)$  کدام است؟

$$f(x) = \log_2 \frac{2-x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(2-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-2(2) - 2(1)}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

$$g(x) = 2^x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2$$

$$g'(-1) = 2^{-1} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$f'(1)g'(-1) = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{-3}{4} \ln 2$$

۹- امتداد نیم‌مماس چپ نمودار تابع  $f(x) = \frac{|x-x| |x^2+1|}{|x-1|}$  در  $x=-1$  محور  $y$  ها را در کدام عرض قطع می‌کند؟ [ ] ، نماد جزء

$$L(-1) = L(1) = 1$$

$$f(x) = \frac{-2x^2+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-4x(x-1) - (-2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{-4x^2+4x-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{-2-4-1}{4} = \frac{-7}{4}$$

$$f(-1) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2}$$

۱۰- خط  $y = -4x + 3$  در دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵ بر نمودار تابع  $g(x) = f(2x+3) + 2f(3x+6)$  مماس است. مشتق تابع  $g$  در  $x = -3$  کدام است؟

$$y = \frac{-7}{4}x + b$$

$$b = y + \frac{7}{4}x$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = \frac{-5}{4}$$

$$g(-3) = 15 = f(-3) + 2f(-3) \Rightarrow f(-3) = 5$$

$$g(5) = -17 \Rightarrow g'(5) = -4$$

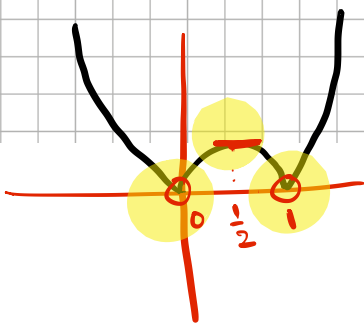
$$(g \circ f)'(-3) = f'(-3)g'(f(-3)) = f'(-3)g'(5) = -4f'(-3)$$

$$g'(x) = 2f'(2x+3) + 6f'(3x+6)$$

$$g'(-3) = -4 = 2f'(-3) + 6f'(-3) \Rightarrow f'(-3) = \frac{-1}{2}$$

$$f'(-3) = \frac{-1}{2}$$

$$-4 = 2 \times \frac{-1}{2} + 6 \times \frac{-1}{2} = -1 - 3 = -4$$



۱۱- تابع  $y = |x^2 - x|$  چند نقطه بحرانی دارد؟

۳ (۲) ✓

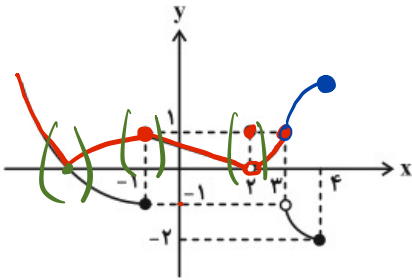
$$|x(x-1)|$$

۴ (۱)

۱ (۴)

۲ (۳)

۱۲- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. تعداد نقاط اکسترمم نسبی دو تابع  $f$  و  $|f|$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۴، ۴ (۱)

۳، ۴ (۲)

۳، ۳ (۳) ✓

۴، ۳ (۴)

→  $k=1, 2$

۱۳- تابع  $f(x) = \begin{cases} k-x & ; x \leq 2 \\ |\sqrt{x-1}-2| & ; x > 2 \end{cases}$  دو مینیمم نسبی دارد.  $k$  چند مقدار طبیعی می تواند بپذیرد؟

۱ (۲)

$$f(2) < \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

بی شمار (۱)

۳ (۴)

$$k-2 < 1 \rightarrow k < 3$$

۲ (۳) ✓

۱۴- مجموع طول نقاط بحرانی نمودار تابع  $f(x) = x^3 - (x+1)|x|$  کدام است؟

$-\frac{1}{3}$  (۲)

-۱ (۱)

۱ (۴) ✓

صفر (۳)

۱۵- تابع  $y = \frac{1+x}{1+x^2}$  روی بازه  $(-1, 2)$  کدام وضعیت را دارد؟

صعودی (۱)

(۲) ابتدا صعودی، سپس نزولی و در نهایت صعودی

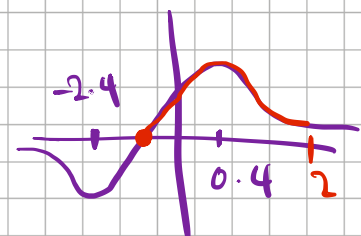
(۴) ابتدا صعودی و سپس نزولی ✓

(۳) ابتدا نزولی، سپس صعودی و در نهایت نزولی

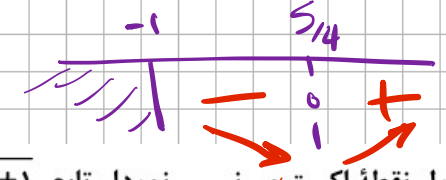
$$y' = \frac{(1+x^2) - (2x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2} = \frac{-(x^2 + 2x - 1)}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$x$	$-1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$
$y'$	-	+
$y$	↘	↗



$$y' = a - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

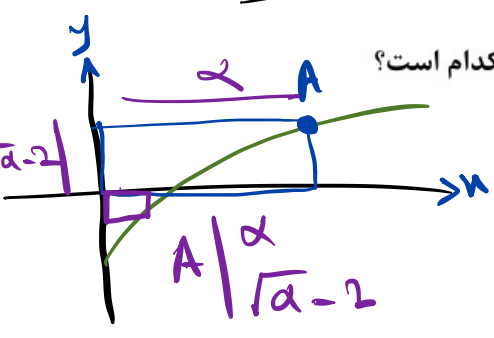


۱۶- اگر  $x = \frac{5}{4}$  طول نقطه اکسترمم نسبی نمودار تابع  $y = ax - \sqrt{x+1}$  باشد، مقدار و نوع این اکسترمم کدام است؟

$y = \frac{x}{3} - \sqrt{x+1}$

$\frac{5}{12} - \frac{3}{2} = \frac{-13}{12}$  (۲) مینیمم  $-\frac{9}{8}$   
 $-\frac{13}{12}$  (۱) ماکزیمم  
 $-\frac{9}{8}$  (۳) مینیمم

۱۷- دو ضلع مستطیل ABCD روی محورهای مختصات و یکی از رأس‌های این مستطیل روی نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x} - 2$  قرار دارد.



بیشترین مساحت این مستطیل که در ناحیه چهارم دستگاه مختصات تشکیل می‌شود، کدام است؟

$S = |\alpha(\sqrt{\alpha} - 2)| = \alpha\sqrt{\alpha} - 2\alpha$   
 $S' = \frac{3}{2}\sqrt{\alpha} - 2 = 0$   
 $\sqrt{\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{16}{9}$   
 $S = \frac{16}{9}(\frac{4}{3} - 2) = \frac{32}{27}$

۱۸- در نقاط به طول طبیعی، مماس‌هایی بر نمودار تابع  $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(10x-3)^2} - x^2$  رسم کرده‌ایم. شیب چند خط از این خطوط، مثبت است؟

$f(x) = \frac{3}{20}(10x-3)^{\frac{2}{3}} - x^2$   
 $f'(x) = \frac{3}{20}(\frac{4}{3})(10x-3)^{-\frac{1}{3}}(10) - 2x$   
 $= 2\sqrt[3]{10x-3} - 2x > 0$   
 $\sqrt[3]{10x-3} > x \rightarrow 10x-3 > x^3$   
 $x^3 - 10x + 3 < 0$   
 $(x-3)(x^2+3x-1) < 0$   
 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$   
 $0.2 \quad -6.2$   
 $0.1 \quad -3.1$

۱۹- مقدار مینیمم نسبی  $y = \sin x - \cos 2x$  کدام است؟

$y = 2\sin^2 x + \sin x - 1$   
 $2t^2 + t - 1$   
 $t_s = \frac{-1}{4} = \underline{\underline{\sin x}}$

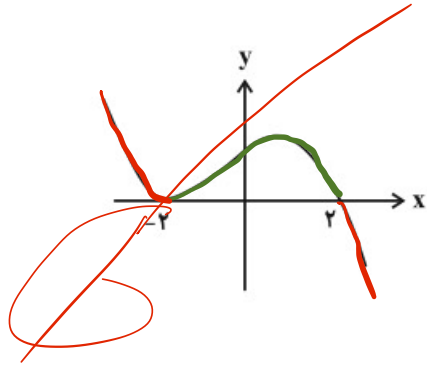
۲۰- اختلاف ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع  $f(x) = 2kx\sqrt{k-x^2}$  برابر  $\frac{1}{9}$  است. مقدار  $f(k)$  چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

$D_f = [-\sqrt{k}, \sqrt{k}] \quad k > 0$   
 $f'(x) = 2k\sqrt{k-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{k-x^2}}(2kx)$   
 $2k\sqrt{k-x^2} = \frac{2kx^2}{\sqrt{k-x^2}}$   
 $2k(k-x^2) = 2kx^2$   
 $k-x^2 = x^2 \rightarrow x^2 = \frac{k}{2}$   
 $f(\frac{\sqrt{2k}}{2}) = k\sqrt{2k}\sqrt{k-\frac{k}{2}} = k^2$   
 $f(-\frac{\sqrt{2k}}{2}) = -k^2$   
 $2k^2 = \frac{8}{9} \rightarrow k = \frac{2}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{27}$   
 $f(\frac{2}{3}) = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{4}{9}} = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$3^n > 0 \rightarrow 3^{n-1} > 0 \rightarrow \underbrace{3^{n-1}}_y > -2$$

۲۱- برد تابع  $y = 3^{x-1} - 2$  کدام است؟

- (۱)  $(2, +\infty)$   
 (۲)  $(-2, +\infty)$    
 (۳)  $(1, +\infty)$   
 (۴)  $(0, +\infty)$



۲۲- نمودار تابع  $f$  در شکل زیر رسم شده است. دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{f(x)}}$  کدام است؟

$$\frac{x+2}{f} \geq 0 \begin{cases} f > 0 \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow (-2, 2) \\ f < 0 \rightarrow x+2 \leq 0 \rightarrow (-\infty, -2] \end{cases}$$

(۱)  $(-2, +\infty) - \{2\}$   
 (۲)  $(-\infty, 2) - \{-2\}$   
 (۳)  $(-2, 2)$    
 (۴)  $(2, +\infty)$

۲۳- نمودار تابع خطی  $f$  و تابع درجه دوم  $g$  در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع  $\frac{f}{g}$  کدام می تواند باشد؟

$g = k(x^2 - 4x + 3)$   
 $f = \frac{\alpha}{3}x - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{3}(x-1) = k(x-1)$   
 $\alpha = 3k \mid y = \frac{k(x-1)}{k(x^2-4x+3)}$   
 $y = \frac{x-1}{(x-1)(x-3)}$   
 $y = \frac{1}{x-3}$

۲۴- مجموعه جواب های معادله  $[x^2] + [x] = 1$  مجموعه  $\{c\} - (a, b)$  است. حاصل  $abc$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$[x^2] = 1 - [x]$   
 $(-\sqrt{5}, -\sqrt{3}) - (-2\sqrt{5}, -2)$   
 $-\sqrt{5} \times 2 = -2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -4\sqrt{5}$

۲۵- خط  $y = \frac{x+2}{10}$  نمودار وارون تابع  $f(x) = x + 2\sqrt{x}$  را در نقطه A قطع می کند. معادله خطی که از مبدأ مختصات و نقطه A می گذرد کدام است؟

$f^{-1}(x) = y \leftrightarrow f(y) = x$   
 $10 = y + 2 \rightarrow y = 8$   
 $x = 10y - 2$   
 $y^{-1}(x) = 10x - 2$

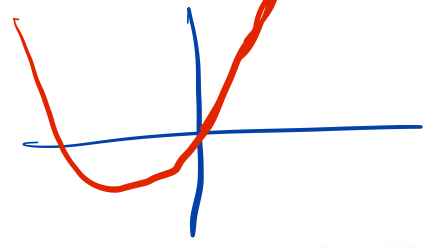
(۱)  $2x - 11y = 0$    
 (۲)  $2x + 11y = 0$   
 (۳)  $11x - 2y = 0$   
 (۴)  $11x + 2y = 0$

$\begin{vmatrix} \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{22}{9} & 0 \end{vmatrix} \rightarrow A \begin{vmatrix} \frac{22}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$   
 $m = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{22}{9}} = \frac{2}{11} \rightarrow y = \frac{2}{11}x$   
 $\rightarrow 2x - 11y = 0 \rightarrow 11y = 2x$

$$(f+g)(x) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

$$y \rightarrow [0, +\infty) \quad (f+g)^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{x+1} - 1 \quad x \geq 0$$

۲۶- توابع  $f(x) = 2x - \sqrt{x}$  و  $g(x) = x^2 + \sqrt{x}$  مفروض اند. ضابطه وارون تابع  $f+g$  کدام است؟



$$y = \sqrt{x+1} + 1; \quad x \geq 0$$

$$y = \sqrt{x+1} - 1; \quad x \geq 0 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x+1} + 1; \quad x \geq -1$$

$$y = \sqrt{x+1} - 1; \quad x \geq -1 \quad (3)$$

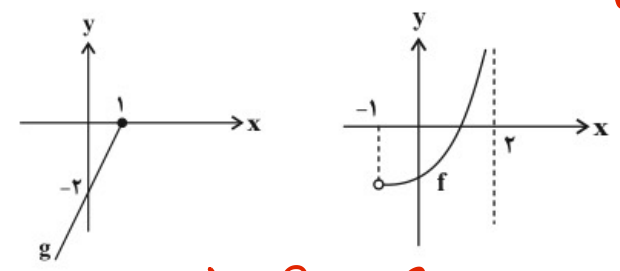
۲۷- نمودار توابع  $f$  و  $g$  در شکل زیر رسم شده است. اگر دامنه تابع  $f \circ g$  بازه  $(a, b)$  باشد، حاصل  $b-a$  کدام است؟

$\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$(-\infty, 1] \cap \left(\frac{1}{2}, 2\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$



$$D_f = (-1, 2)$$

$$-1 < 2x - 2 < 2$$

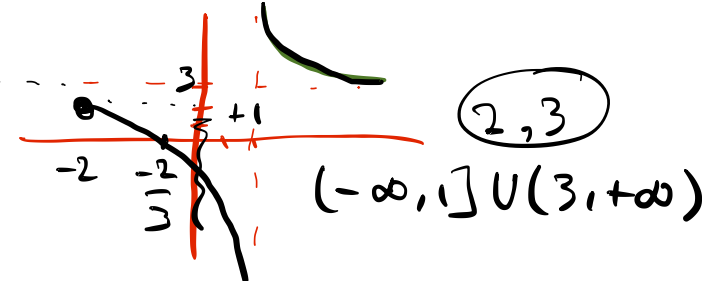
$$\frac{1}{2} < x - 1 < 1 \rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$$

$$g(x) = 2x - 2$$

$$x \leq 1$$

۲۸- توابع  $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$  و  $g(x) = \frac{2x+2}{x-2}$  مفروض است. برد تابع  $g \circ f^{-1}$ ، چند عدد صحیح را شامل نمی شود؟

$$R_{g \circ f^{-1}} = R_g \setminus D_g = R_{f^{-1}} = D_f$$



$$\log(|5x-1|+2) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}$$

$$x \geq \frac{1}{5} \log(5u+1)$$

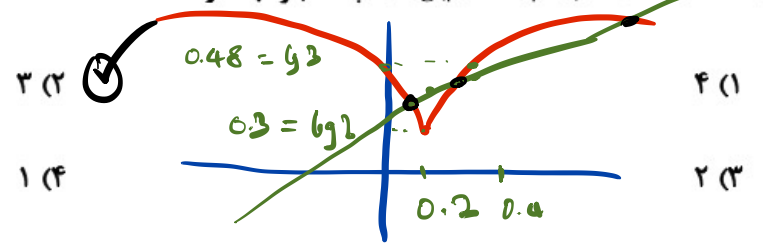
$$x < \frac{1}{5} \log(3-5u)$$

$$b = a^c \rightarrow \log_b a = c$$

$$\log a + \log b = \log ab$$

$$\log_b a^c = \frac{1}{c} \log_b a = \log_b \sqrt[c]{a}$$

۲۹- معادله  $4 \log(|\Delta x - 1| + 2) - 2x = 1$  چند جواب دارد؟



۳۰- جزء صحیح جواب معادله  $\log_2 \Delta x + \log_8 x^2 = 4$  کدام است؟

$$\log 2 = 0.3$$

$$2 \log 2 = 0.6$$

$$\log 4 = 0.6 \rightarrow 10 = 4$$

$$\log_2 \frac{5x}{2} + \log_2 \sqrt[3]{x^2} = 4 = \log_2 \frac{5x \sqrt[3]{x^2}}{2} = 4 \rightarrow 2^4 = \frac{5x \sqrt[3]{x^2}}{2} = 2$$

$$x^{\frac{5}{3}} = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} \rightarrow x = \left(\frac{32}{10}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{2^3}{10^{0.6}} = \frac{8}{10^{0.6}} = \frac{8}{4}$$