

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۱- آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$ در کدام نقطه با آهنگ تغییر متوسط این تابع در بازه $[1, 2]$ برابر است؟

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{10 - 5\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

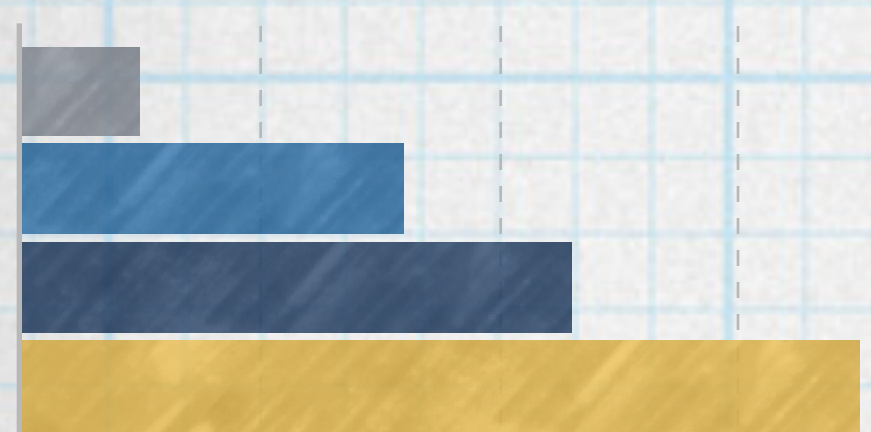
$$\frac{10 + 5\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\sqrt{16} - \sqrt{9}}{1} = 1 = f'(x) = \frac{5 - x}{\sqrt{10x - x^2}} = 1$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2\sqrt{10x - x^2}} = \frac{5 - x}{\sqrt{10x - x^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 - x = \sqrt{10x - x^2} \quad * \\ \rightarrow x^2 + 25 - 10x = 10x - x^2 \\ \sqrt{2} \approx 1.4 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow 2x^2 - 20x + 25 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 200}}{4} = \frac{20 \pm 10\sqrt{2}}{4} = \frac{10 \pm 5\sqrt{2}}{2} = \frac{10 \pm 7}{2} \begin{matrix} 8.5 \\ 1.5 \end{matrix}$$



x
8.5
1.5
✓

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۲- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه $x=2$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x^2-3x+2} = 4$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{g(2+h)-5} = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $(f \times g)'(2)$ کدام است؟

$g(2) = 5$

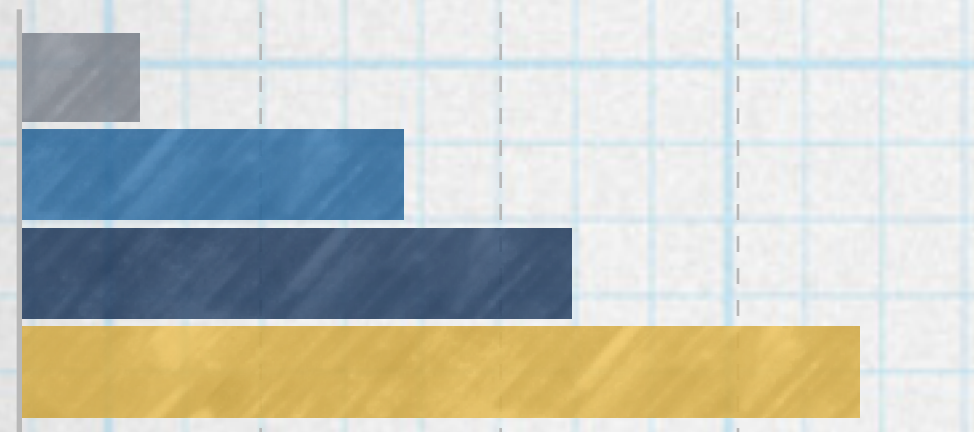
HOP

$f(2) = 3$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{g'(2+h)} = \frac{2}{g'(2)} = \frac{1}{4} \Rightarrow g'(2) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{2x-3} = \frac{f'(2)}{1} = 4 \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$\left. \begin{aligned} & f(2)g'(2) + g(2)f'(2) \\ & 3 \times 8 + 5 \times 4 \\ & = 24 + 20 = 44 \end{aligned} \right\}$$



پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۳- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = (x + [-x])\sqrt[3]{x}$ درست است؟

~~$f'_-(0) = +\infty, f'_+(0) = 0$ (۱)~~

~~$f'_-(0) = 0, f'_+(0) = -\infty$ (۲)~~

$f'_-(0) = 0, f'_+(0) = +\infty$ (۳)

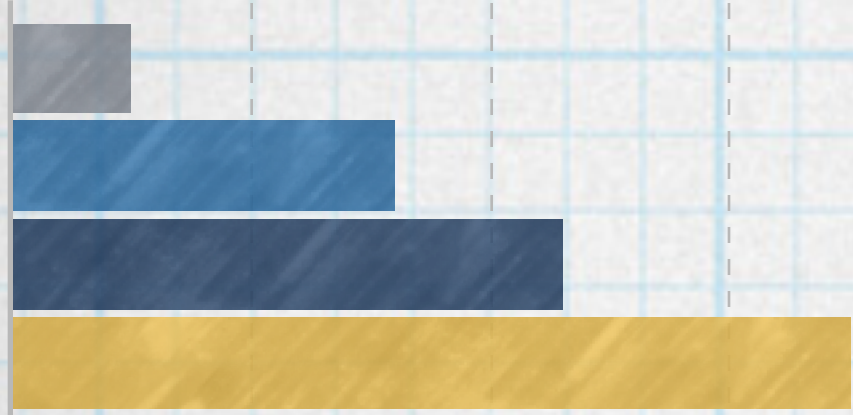
$f'_-(0) = 0, f'_+(0) = -\infty$ (۴)

$x = 0^+ \rightarrow [-x] = -1 \rightarrow f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x}$

$f'_+(0) = (x-1) \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$x = 0^- \rightarrow [-x] = 0 \rightarrow f(x) = (x - 0)\sqrt[3]{x} = x\sqrt[3]{x} = x^{4/3}$

$\rightarrow f'_-(0) = \frac{4}{3} x^{1/3} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} \Big|_{x=0} = 0$



پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۴- خطوط مماس بر نمودار تابع $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x-2}$ در نقاطی به طول ۲ و α روی نمودار تابع، بر هم عمودند. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای α کدام است؟ آزمون وی ای پی

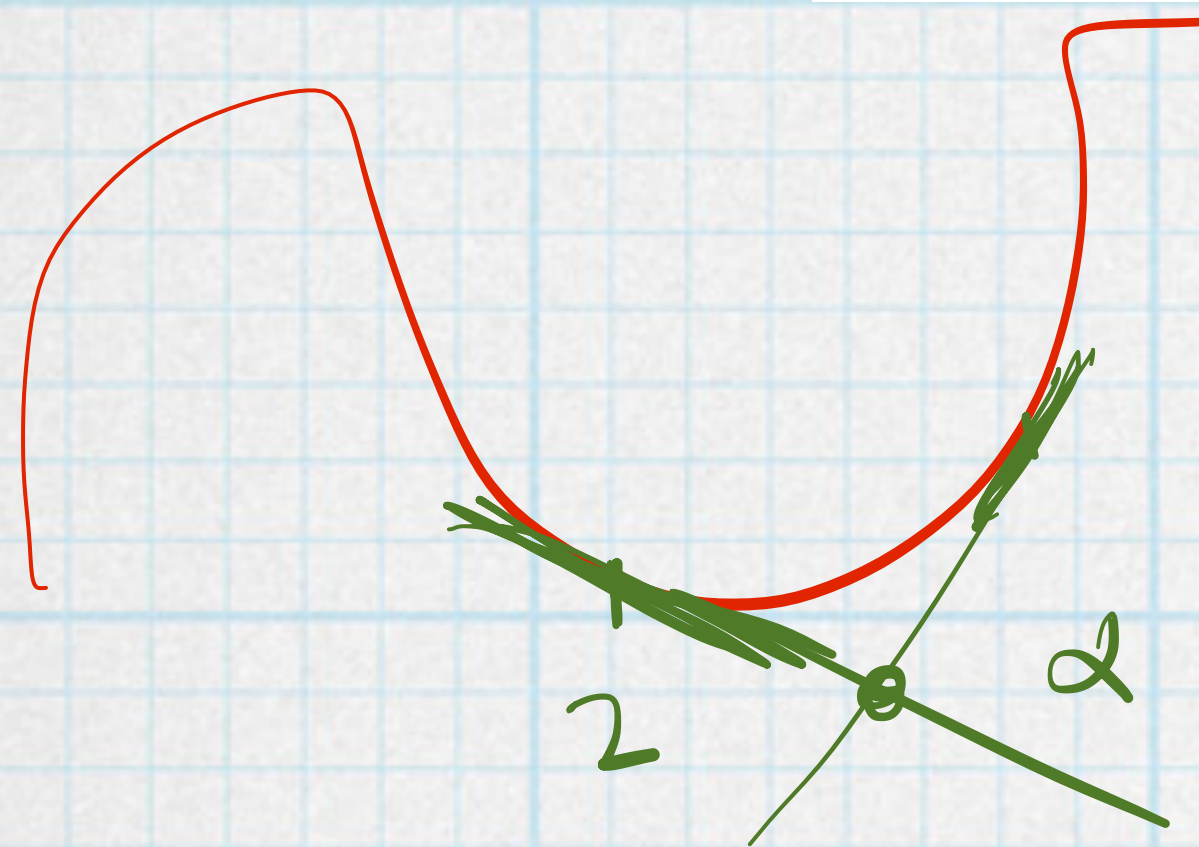
۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{31}{8}$ (۲)



$\frac{33}{8}$ (۱)



$$f'(2) \times f'(\alpha) = -1$$

$$f'(\alpha) = \frac{-1}{f'(2)} \quad \text{و} \quad f'(x) = 2 - 3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} \quad \rightarrow \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{0^+} = 2 - \infty = -\infty$$

$$f'(\alpha) = \frac{-1}{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad | \quad f'(\alpha) = 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = 0$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{(x-2)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{8} \rightarrow |x-2| = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \text{و} \quad \alpha_2 = 2 - \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8}$$

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۵- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$ در نقطه $(3, f(3))$ ، نمودار این تابع را، در نقطه دیگری قطع می کند. طول این نقطه کدام است؟

$$\frac{3}{4} (4) \quad \frac{3}{5} (3) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{1}{2} (1)$$

$$f'(x) = \frac{5(x^2+1) - 2x(5x)}{(x^2+1)^2} = \frac{5 - 5x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left| \begin{array}{l} 3 \\ \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$f'(3) = \frac{5 - 45}{100} = \frac{-40}{100} = \underline{\underline{-0.4}}$$

$$y = -0.4x + b \rightarrow \frac{3}{2} = -0.4 \times 3 + b \rightarrow b = 1.5 + 1.2 = 2.7$$

$$\underline{\underline{y = -0.4x + 2.7}} \rightarrow \frac{5x}{x^2+1} = \frac{2.7 - 4x}{10} \rightarrow 50x = 27x^2 - 4x^3 + 27 - 4x$$

$$\rightarrow 4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0 = 4(x-3)^2(x-\alpha) \Rightarrow 4 \times 9 \times (-\alpha) = -36\alpha$$
$$-27 = -36\alpha \rightarrow \alpha = \frac{3}{4}$$

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

$$4 - 12 - 16 = -24$$

اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x > 2 \\ \frac{c}{x} & x \leq 2 \end{cases}$ و $f'(2) = 4$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- 24 (4) ✓
- 20 (3)
- 16 (2)
- 12 (1)

$$f'(2) = \underline{4} = f'_+(2) = f'_-(2)$$

$$\rightarrow 2ax + b \Big|_{x=2} \quad \underline{4a + b = 4}$$

$$\frac{-c}{x^2} \Big|_{x=2} \quad \frac{-c}{4} = 4$$

$$\boxed{c = -16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{-16}{2} = -8$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -8 = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 + bx = \begin{cases} 4a + 2b = -8 \\ 4a + b = +4 \end{cases}$$

$$a = 4 \quad \leftarrow \quad b = -12$$

۷- تابع $f(x) = x|x^2 - 3x| + x^2$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر نیست. مقدار $f'_+(a) - f'_-(a)$ کدام است؟

۳۰ (۴)

۱۸ (۳) ✓

۱۶ (۲)

۵ (۳)

۱۲ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 & x > 3 \\ 4x^2 - x^3 & 0 < x < 3 \\ x^3 - 2x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

$x > 3 \rightarrow 3x^2 - 4x \rightarrow 0$
 $0 < x < 3 \rightarrow 8x - 3x^2 \rightarrow 0$
 $x \leq 0 \rightarrow 3x^2 - 4x \rightarrow 0$

$$f'_+(3) = 15 \text{ و } f'_-(3) = 24 - 27 = -3$$

تابع f در $x=3$ مشتق ناپذیر است $\rightarrow f'_+(3) \neq f'_-(3)$

$$f'_+(3) - f'_-(3) = 15 - (-3) = \underline{\underline{18}}$$

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

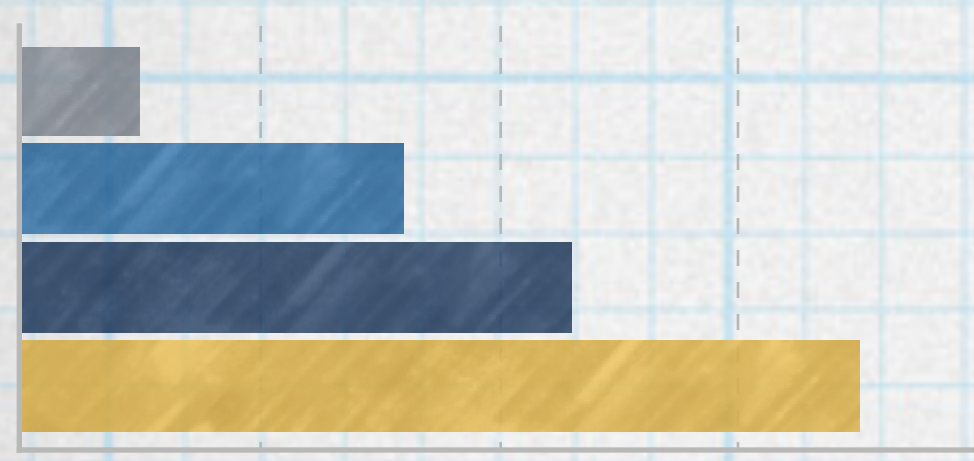
۸- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x^3 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} & x < 1 \end{cases}$ و $h(x) = g \circ f(x)$ باشد، کدام گزینه درست است؟

~~$h'(1) = 1$ و $h'_+(1)$ ناموجود~~

~~$h'_-(1)$ ناموجود و $h'_+(1)$ ناموجود~~ $h'_-(1) = \frac{1}{3}$ ، $h'_+(1) = 4$ ✓

$$h'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g \circ f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x^2) - 2}{x - 1}$$

$$h'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x - 1} = 1 + 1 + 2 = 4$$



پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۹- اگر $f(x) = 4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x-1} - x - 3$ باشد، مشتق تابع $y = f \circ f(x)$ در $x = 8$ کدام است؟

$$\frac{17}{36} \text{ (4)}$$

$$-\frac{29}{36} \text{ (3)}$$

$$\frac{23}{54} \text{ (2)}$$

$$-\frac{25}{54} \text{ (1)}$$

$$(f \circ f)'(8) = f'(8) \times f'(f(8)) = f'(8) \cdot f'(1)$$

$$f(8) = 4\sqrt{8} + \sqrt[3]{8-1} - 8 - 3 = 12 - 11 = 1$$

$$f'(x) = 4 \frac{1 + \frac{1}{3\sqrt{x^2}}}{2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x-1}} - 1 = \frac{2 + \frac{2}{3\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x-1}} - 1$$

$$f'(8) = \frac{2 + \frac{2}{3 \times 4}}{3} - 1 = \frac{13}{18} - 1 = -\frac{5}{18} \quad f'(1) = \frac{2 + \frac{2}{3}}{1} - 1 = \frac{5}{3}$$

$$(f \circ f)'(8) = \frac{5}{3} \times \left(-\frac{5}{18}\right) = -\frac{25}{54}$$

۱۰- اگر تساوی $f(2x+1) = x^2 g(3x+2)$ به ازای هر مقدار x برقرار و $g(5) = g'(5) = g''(5) = 2$ باشد، مقدار $f''(3)$ کدام است؟

$$\frac{19}{2} \text{ (۴)}$$

$$۱۲ \text{ (۳)}$$

$$\frac{23}{2} \text{ (۲)}$$

$$۶ \text{ (۱)}$$

$$2 f'(2x+1) = 2x g(3x+2) + 3x^2 g'(3x+2)$$

$$\hookrightarrow 4 f''(2x+1) = 2g(3x+2) + 6x g'(3x+2) + 6x g'(3x+2) + 9x^2 g''(3x+2)$$

$$x=1 \rightarrow 4 f''(3) = 2g(5) + 6g'(5) + 6g'(5) + 9g''(5)$$

$$= 4 + 12 + 12 + 18$$

$$\rightarrow f''(3) = 1 + 3 + 3 + 4 \cdot 5 = 7 + 4 \cdot 5 = 11 \cdot 5 = \frac{23}{2}$$

۱۱- رابطه $f = \{(1, a+b), (2, a-3b), (1, 2a-1), (2, 4), (3, 2a-b)\}$ تابع است. مقدار $f(3)$ کدام است؟

$(1, a+b)$ $(2, a-3b)$ $(1, 2a-1)$ $(2, 4)$ $(3, 2a-b)$
 ۱(۱) ۲(۲) ۱(۳) ۲(۴) ۳(۱)

$$a+b = 2a-1 \rightarrow b+1 = a$$

$$a-3b = 4 \rightarrow b+1-3b = 4 \rightarrow 1-2b = 4$$

$$\rightarrow b = -\frac{3}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(3) = 2a - b$$

$$f(3) = -1 - (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۱۳- در تابع $f(x) = -ax^2 + 4ax$ که $D_f = R_f = [0, 3]$ می باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

$\frac{117}{64}$ (۴) ✓

$\frac{137}{32}$ (۳)

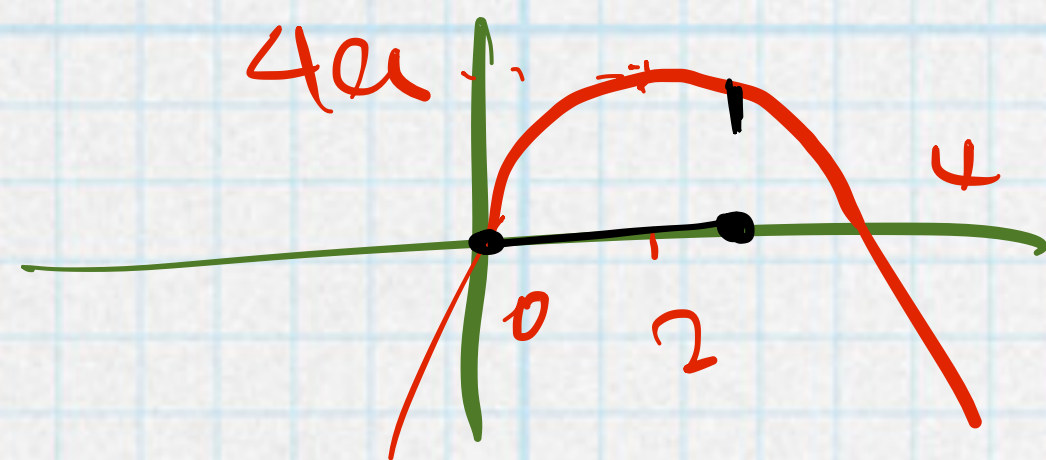
$\frac{105}{16}$ (۲)

$\frac{113}{8}$ (۱)

$$f(x) = ax(-x + 4) = ax(4 - x) \longrightarrow x = 0, 4$$

$x_s = 2$

$a > 0$



$D_f = [0, 3]$

$\rightarrow R_f = [0, 4a]$

$\rightarrow 4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$

$a = \frac{3}{4}$, $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

$x = \frac{3}{4}$

$$\frac{-27}{64} + \frac{9}{4} = \frac{9 \times 16 - 27}{64}$$

~~$f(\frac{4}{3}) = \frac{16}{9}(4 - \frac{4}{3})$~~
 ~~$\frac{16}{9}(\frac{8}{3}) = \frac{128}{27}$~~

$\frac{117}{64}$

$90 + 54 - 27$
 $\frac{117}{64}$

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۱۴- اگر $f(x) = -\sqrt{x^4 - x^2} + x^3$ و $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، کدام گزینه در مورد تابع $y = fog(x)$ درست است؟
 (۱) تهی است. (۲) بی شمار زوج مرتب دارد. (۳) دو زوج مرتب دارد. (۴) سه زوج مرتب دارد.

$g(x) = \sqrt{x(2-x)}$

$$D_f = x^4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) \geq 0 \rightarrow \begin{matrix} x \geq 1 \\ x = 0 \\ x \leq -1 \end{matrix}$$

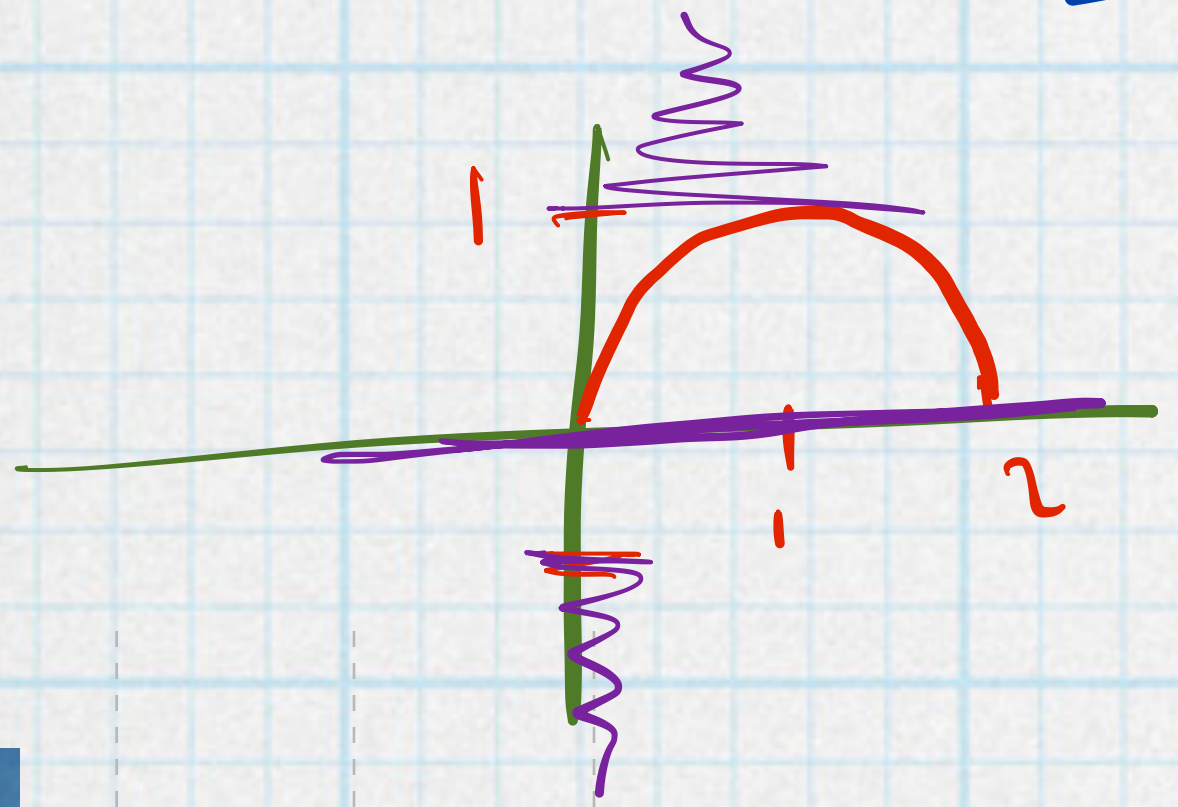
$$= (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$$

$$D_g = 2x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(2-x) \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$[0, 2]$

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$[0, 2]$



$x=1$

$x=0, x=2$

$$fog(x) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0)\}$$

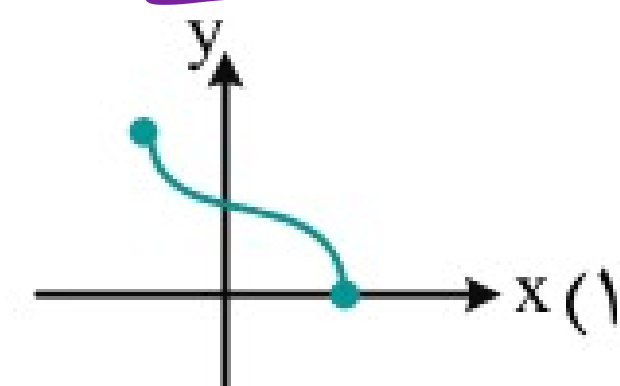
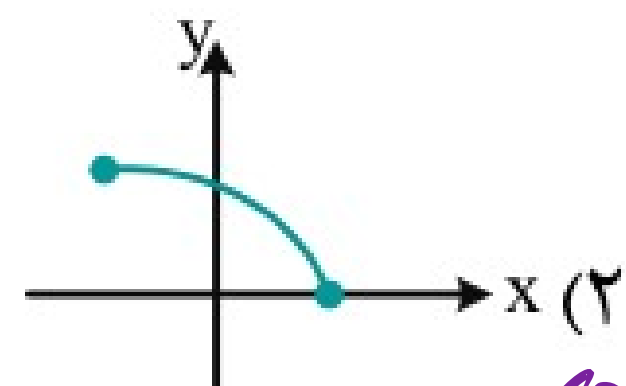
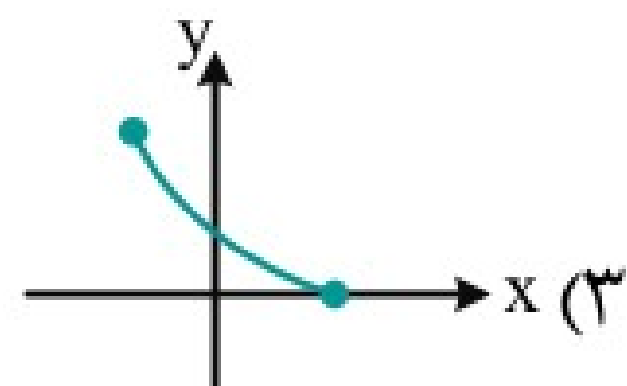
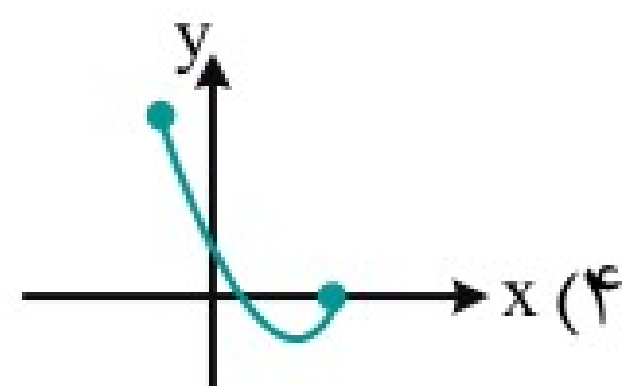
پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

$$y = \frac{f(x) - 2g(x)}{6}$$

۱۵- اگر $f(x) = 2\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x}$ ، $(f+g)(x) = 3\sqrt{2+2\sqrt{1-x^2}}$ و $D_f = D_g$ باشد، کدام گزینه نمودار تابع

$y = \frac{1}{6}f(x) - \frac{1}{3}g(x)$ را نشان می دهد؟ آزمون وی ای پی



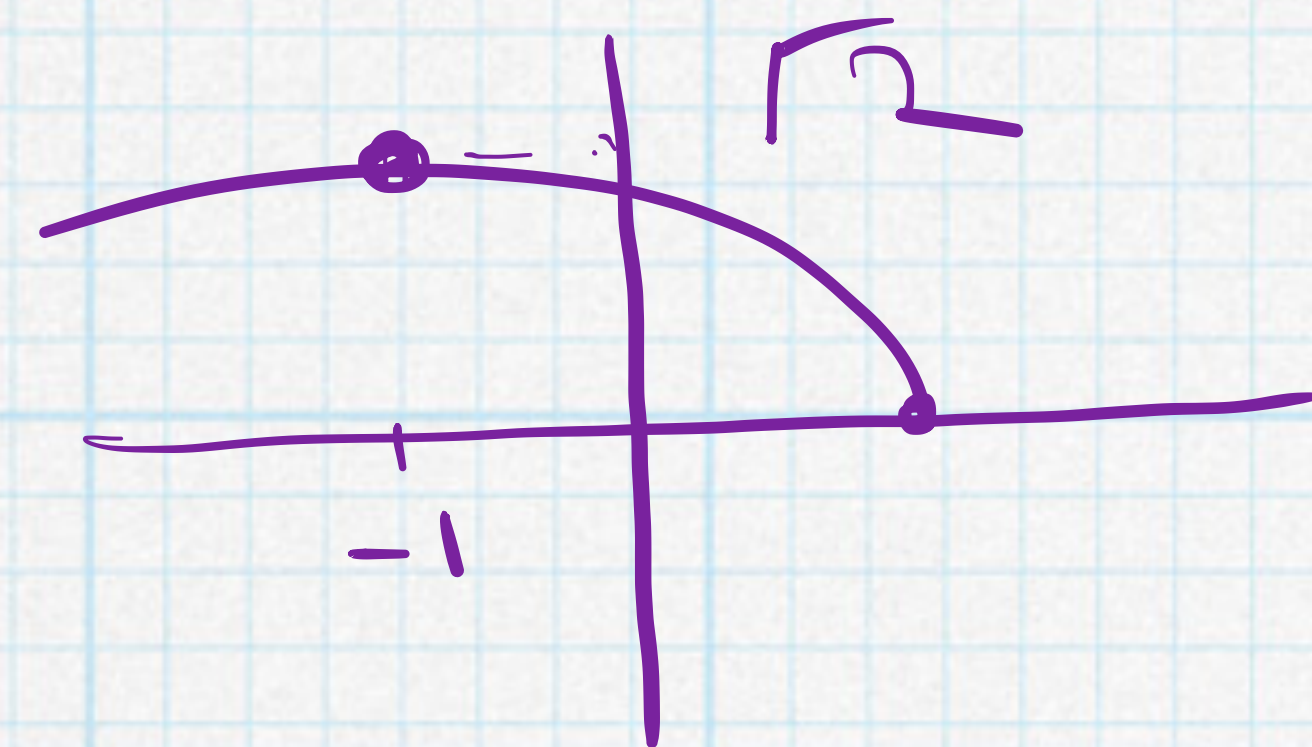
$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = \sqrt{2+2\sqrt{1-x^2}}$$

$$f+g = 3\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1+x}$$

$$g = 3\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

$$y = \frac{2\sqrt{1+x} + 4\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1-x}}{6}$$

$$y = \frac{6\sqrt{1-x}}{6} = \sqrt{1-x} \Rightarrow [-1, 1]$$



پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

۱۶- تابع $f(x) = \left[\frac{1}{2-\sqrt{1-x^2}} + a \right]$ با تابع $g(x) = 1$ برابر می باشد. مقادیر ممکن برای $a+b$ در کدام بازه قرار می گیرد؟

بیان

$D_f = [-1, 1] = [-b, b] \rightarrow b=1$

$(1) \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 $(2) \left[1, \frac{3}{2}\right)$
 $(3) \left[\frac{1}{2}, 1\right)$
 $(4) \left[\frac{3}{2}, 2\right)$

$$\left[\frac{1}{2-\sqrt{1-x^2}} + a \right] = 1 \rightarrow 1 \leq \frac{1}{2-\sqrt{1-x^2}} + a < 2$$

$$-1 \leq -\sqrt{1-x^2} \leq 0 \rightarrow 1 \leq 2-\sqrt{1-x^2} \leq 2 \rightarrow 1 \geq \frac{1}{2-\sqrt{1-x^2}} \geq \frac{1}{2}$$

$$1+a \geq \frac{1}{2-\sqrt{1-x^2}} + a \geq \frac{1}{2} + a$$

$$2 > \frac{1}{2} + a \geq 1$$

$$2 > 1+a \rightarrow a < 1$$

$$a > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq a < 1$$

$$\frac{3}{2} \leq a+1 < 2 \rightarrow \frac{3}{2} \leq a+b < 2$$

$b=1$

۱۷- اگر $f(x) = a\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ و $f^{-1}(28) = 64f^{-1}(4)$ باشد، مقدار $f(\frac{1}{64})$ کدام است؟

پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

$\frac{5}{8}$ (۴) ✓

$\frac{7}{8}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

$$| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \in f \iff | \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \in f^{-1}$$

$$f^{-1}(28) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = 28$$

$$\rightarrow f(\beta) = 4$$

$$\alpha = 64\beta$$

$$f(x) = 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

$$f\left(\frac{1}{64}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$$f(\alpha) = a\sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha} = 28 = a\sqrt{64\beta} + \sqrt[3]{64\beta} = 28 = 8a\sqrt{\beta} + 4\sqrt[3]{\beta} = 28$$

$$f(\beta) = a\sqrt{\beta} + \sqrt[3]{\beta} = 4$$

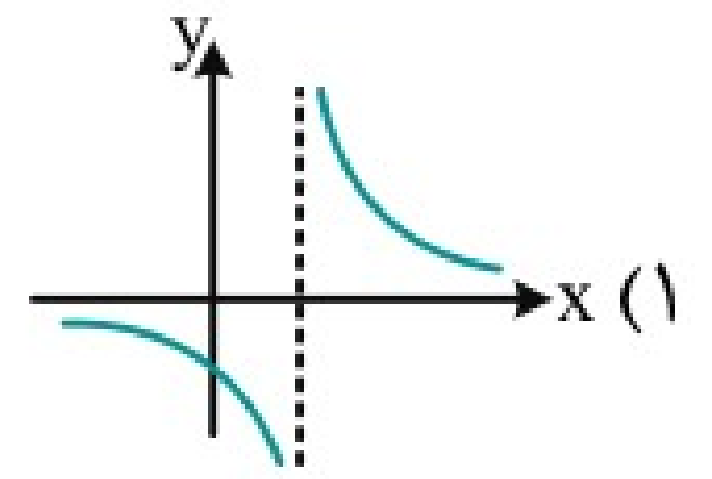
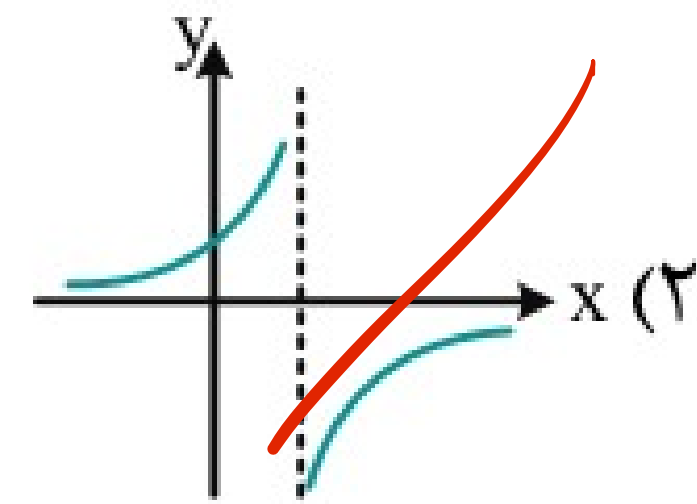
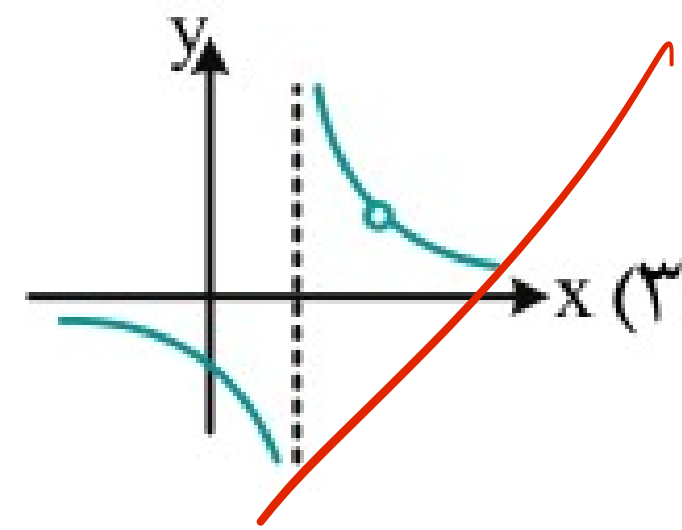
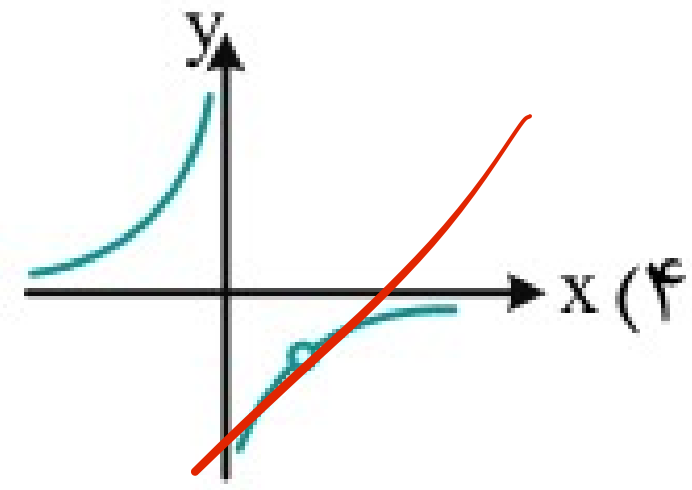
$$\xrightarrow{\div 4} 2a\sqrt{\beta} + \sqrt[3]{\beta} = 7$$

$$3 + \sqrt[3]{\beta} = 4 \rightarrow \beta = 1$$

$$a\sqrt{\beta} = 3$$

$$\rightarrow a = 3$$

۱۸- اگر $f(x) = \log_x^2 x$ و $f^{-1}(x) = 2^{g(x)}$ باشد، کدام گزینه نمودار تابع $g(x)$ را نشان می‌دهد؟



پویا کلانتری پور

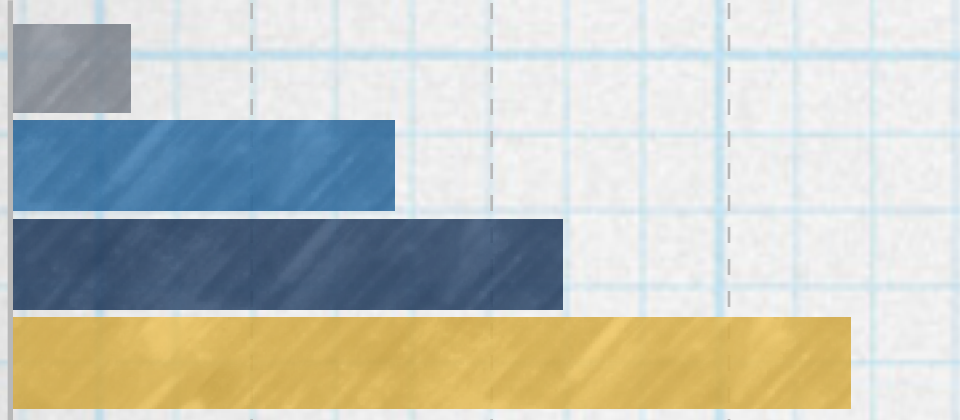
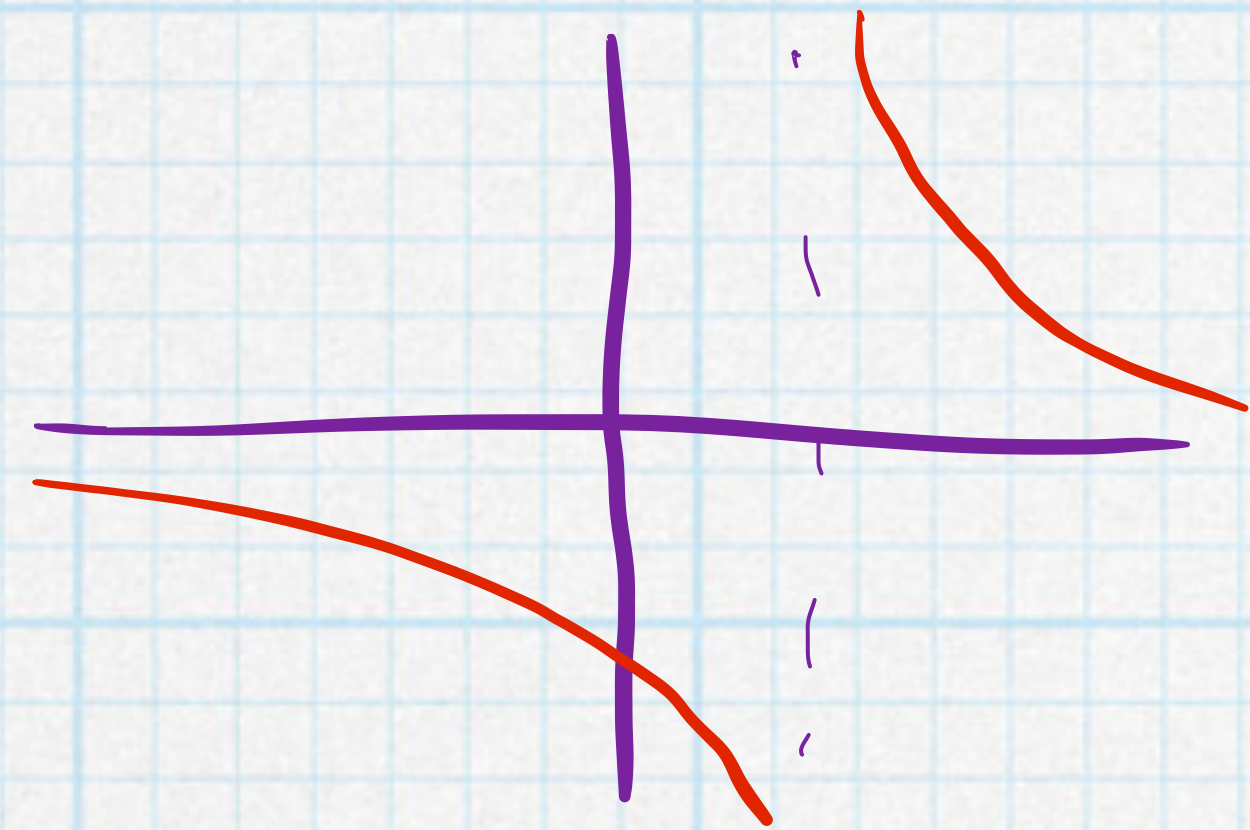
تحلیل گر ریاضیات کنکور

$$f(x) = \log_x^2 x = \log_x x + \log_x x = 1 + \log_x x = y$$

$$y - 1 = \log_x x \rightarrow \frac{1}{y-1} = \log_x x \rightarrow x = 2^{\frac{1}{y-1}}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{1}{g(x)}}$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1} \rightarrow$$



پویا کلانتری پور

تحلیل گر ریاضیات کنکور

$60 = 12 \times 5 = 3 \times 2^2 \times 5$
 $2 \times 3 \times 5^2 = 50 \times 3$

حاصل عبارت $A = \frac{\log 60 + \log 2 \times \log 3}{\log 150 + \log 2 \times \log 5}$ با کدام گزینه برابر است؟

~~$\frac{1 + \log 5}{2 - \log 5}$~~ $\frac{1.7}{1.3} > 1$ $\frac{1 + \log 2}{2 - \log 2}$ $\frac{1.3}{1.7} = \frac{13}{17}$ $\frac{1 + \log 3}{2 - \log 3}$ $\frac{1.5}{1.5} = 1$

$$A = \frac{\log 3 + 2 \log 2 + \log 5 + \log 2 \times \log 3}{\log 2 + \log 3 + 2 \log 5 + \log 3 \times \log 5}$$

$\log 2 + \log 5 = 1$

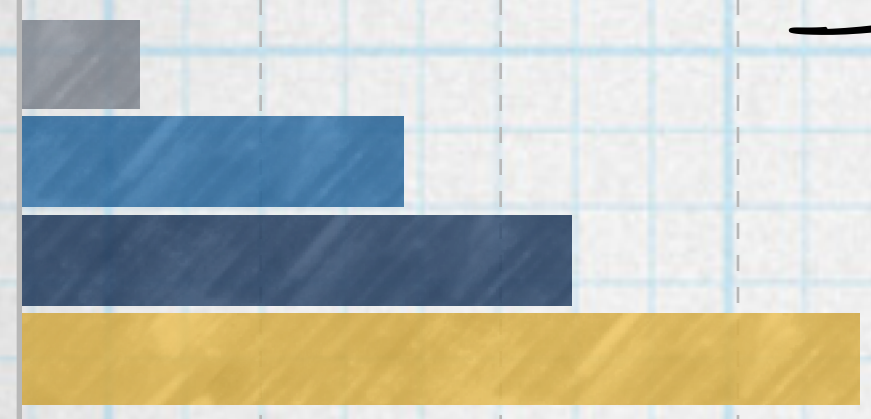
$\log 2 \approx 0.3$

$\log 5 \approx 0.7$

$\log 3 \approx 0.5$

$$\frac{0.5 + 0.6 + 0.7 + 0.15}{0.3 + 0.5 + 1.4 + 0.35} = \frac{1.95}{2.55} = \frac{175}{255}$$

$$\frac{39}{51} \approx \frac{40}{50} \approx 0.8$$



(۴) صفر

(۳) ۲

(۲) ۲

(۱) ۱



$$\frac{1}{2} \log_2^x = \log_3^{x-1}$$

x $0 < x < 1$

$$\log_4^x = \log_3^{x-1}$$

$$\log_4^x = \log_4^3$$

$$\underline{\underline{x-1}} = 3 = \underline{\underline{x}}$$

$$\log_b^a = c \iff a = b^c$$

$$a \log_c^b = b \log_c^a$$

