

آزمون ۲۰ بهمن ماه دوازدهم تجربی

۱۴۱- معادله حرکت متحرکی $x(t) = t^2 + 3t + 1$ است. آهنگ متوسط در بازه $[2, 4]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان متحرک در

شروع بازه بیشتر است؟

$\frac{3}{5} (4)$ $\frac{2}{5} (3)$ $\frac{2}{2} (2)$ $t=2$ $\frac{3}{1}$

\Rightarrow آهنگ لحظه‌ای = آهنگ متوسط \Rightarrow $x' = 2t + 3$

$t=3 \rightarrow x' = 9$ (آهنگ) \rightarrow 2
 $t=2 \rightarrow x' = 7$

۱۴۲- در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \neq 2 \\ c & x = 2 \end{cases}$ اگر $f'(2) = 3$ باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟

$\frac{2}{7} (4)$ $\frac{3}{3}$ $\frac{2}{7} (2)$ $\frac{3}{1}$

$\begin{cases} 2^+ : \frac{fa+b}{0} \\ 2 : c \end{cases}$

$fa+b = 0 \rightarrow b = -fa$

$\frac{fa}{H} \xrightarrow{x=2} \frac{fa}{1} = c \rightarrow c = fa$

$\Rightarrow b = -c$

$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{ax^2+b}{x-2} - c}{x-2} = \frac{\frac{ax^2+b-cx+2c}{x-2}}{x-2} = \frac{ax^2+b-cx+2c}{(x-2)^2}$

$a(x-2)^2$

$\Rightarrow \frac{a(x-2)^2}{(x-2)^2} = a \Rightarrow f'(2) = a = 3$

$\begin{cases} c = 12 \\ b = -12 \end{cases}$

۱۴۳- اگر $f(x) = \frac{4-x}{2x+7}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - \sqrt[3]{f(-1)}}{x+1}$ کدام است؟

H
0/0

$$\frac{-1}{5} \quad (2) \checkmark$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3 \sqrt[3]{f^2}} \times f' \quad x = -1$$

$$\frac{1}{3 \sqrt[3]{f^2(-1)}} \times f'(-1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{-3}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{-1}{15} \quad (4)$$

$$\frac{1}{15} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{-x+4}{2x+7}$$

$$\hookrightarrow f(-1) = \frac{5}{5} = 1$$

$$f' = \frac{-1-2}{(2x+7)^2} \quad x=-1 \quad \frac{-3}{25} = -\frac{3}{25}$$

۱۴۴- تابع $f(x) = x^2|x^2-3|$ مفروض است. اگر شیب نیم‌مماس‌های راست و چپ این تابع در $x=3$ به ترتیب برابر مقادیر

$$\Rightarrow \sqrt{11-72} = \sqrt{9} = 3$$

m_1 و m_2 باشند، آنگاه حاصل $\sqrt{m_1 + m_2}$ کدام است؟ [] : نماد جزء صحیح است.

$$m_1 = f'_+(3) \Rightarrow 3^+ : f(x) = x^2 \times [9^+] \times |3^+ - 3| \Rightarrow f = 9x^2(x-3)$$

مایل منتهه

$$\hookrightarrow f'_+(3) = 9 \times 9 \times 1 = 11$$

$$m_2 = f'_-(3) \Rightarrow 3^- : f(x) = x^2 \times [9^-] \times |3^- - 3| \Rightarrow f = -8x^2(x-3)$$

مایل منتهه

$$\hookrightarrow f'_-(3) = -8 \times 9 \times 1 = -72$$

۱۴۵- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$ باشد، مشتق $g(x) = f\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)$ در $x=1$ کدام است؟

$$g' = \frac{f' \cdot \frac{1}{x^2} - 2x \cdot f}{x^4} \times f' \left(\frac{f}{x^2} \right)$$

$$g'(1) = (f'(1) - 2f(1)) \times f' \left(\frac{f(1)}{1} \right)$$

$$g'(1) = \frac{-1}{4} \times \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$f(1) = 2 - \sqrt{1+3} = 0$

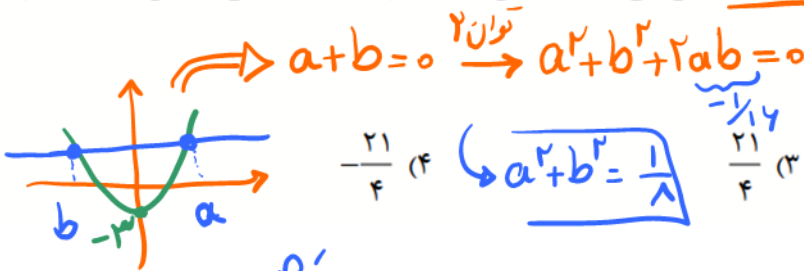
$\frac{\sqrt{3}}{12}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ (۱) ✓

$\frac{\sqrt{6}}{12}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{24}$ (۳)

$$f' = -\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{4}, f'(0) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

۱۴۶- خط L موازی محور x ها سهمی $f(x) = 2x^2 - 3$ را در دو نقطه قطع می کند و مماس های رسم شده بر سهمی در این نقاط بر هم



$$a+b=0 \xrightarrow{\text{توان}} a^2+b^2+2ab=0$$

$$\frac{21}{4} \text{ (۴)} \rightarrow a^2+b^2 = \frac{1}{4} \quad \frac{21}{4} \text{ (۳)}$$

$$f' = 4x$$

$$f'(a) = 4a$$

$$f'(b) = 4b$$

$$\xrightarrow{x} -1 \Rightarrow 4a \times 4b = -1$$

$$ab = -\frac{1}{16}$$

عمودند. مجموع عرض این دو نقطه کدام است؟

$$\frac{23}{4} \text{ (۲) ✓} \quad \frac{\sqrt{6}}{12} \text{ (۱)}$$

$$f(a) + f(b) = 2a^2 - 3 + 2b^2 - 3$$

$$= 2(a^2 + b^2) - 6$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\right) - 6 = \frac{1}{2} - 6 = -\frac{11}{2}$$

۱۴۷- توابع f و g روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته هستند، اگر $f(5)=3$ ، $g(2)=5$ ، $f'(5)=4$ ، $g'(3)=-2$ و $g'(2)=\frac{1}{2}$ باشند،

$$x=2 \Rightarrow g(f(g(x))) - g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(f(g(x))) - g(x)}{2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(f(g(x))) - g(x)}{2x - 4} = \frac{g(f(g(2))) - g(2)}{2 \cdot 2 - 4} = \frac{g(f(5)) - g(2)}{0} = \frac{f(g(2)) - g(2)}{0} = \frac{f(5) - g(2)}{0} = \frac{3 - 5}{0} = \frac{-2}{0}$$

$$H \rightarrow \frac{g'(x) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(f(g(x)))}{2} \Big|_{x=2}$$

$$\Rightarrow \frac{g'(2) \cdot f'(5) \cdot g'(f(5))}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-2)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$f \circ g \rightarrow g' \cdot f'(g)$$

$$f \circ g \circ f \rightarrow f' \cdot g'(f) \cdot f'(g \circ f)$$

۱۴۸- اگر $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 3x^2 + 2}$ باشد، آنگاه مقدار $f''(0)$ کدام است؟

$$f = \frac{(x^2 - 1) + (x^2 - 2)}{(x^2 - 1)(x^2 - 2)} = \frac{1}{x^2 - 2} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$f' = \frac{-2x}{(x^2 - 2)^2} + \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(0) = \frac{-2 \times 1}{4} + \frac{-2 \times 1}{1} = \frac{-2}{4} + (-2) = \frac{-5}{2}$$

۱۴۹- تابع $f(x) = |x^3 + mx^2 + (m+3)x|$ فقط در یک نقطه مشتق ناپذیر است. مجموع مقادیر صحیح ممکن برای m کدام است؟

دافل قدر مطلق فقط یکی ریشه سه دارد!

$$f(x) = |x(x^2 + mx + m + 3)|$$

حالت اول $\Delta \leq 0$

$$m^2 - 4(m+3) \leq 0 \rightarrow m^2 - 4m - 12 \leq 0$$

$$(m-4)(m+3) \leq 0$$

۱۵ (۲) ✓
۱۱ (۱)
۲۱ (۴)
۱۸ (۳)

۱۵
مجموع $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
-۳

$$-2 \leq m \leq 4$$

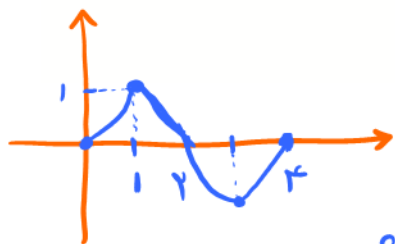
حالت دوم $x=0$ ریشه

$$0 + 0 + m + 3 = 0 \rightarrow m = -3$$

$$f = |x(x^2 - 3x)| = |x^2(x-3)|$$

۱۵۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{8}{3} & 1 \leq x < 4 \end{cases}$ با دوره تناوب ۴ را در نظر بگیرید. اگر نیم مماس‌های واقع بر منحنی این تابع در نقطه‌های

به طول $x = -7$ محور عرض‌ها را در نقاط A و B قطع کنند، جزء صحیح طول پاره خط AB کدام است؟



۳۹ (۴)

۳۰ (۳) ✓

طول راس $= \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$

۱۳ (۲)

۴ (۱)

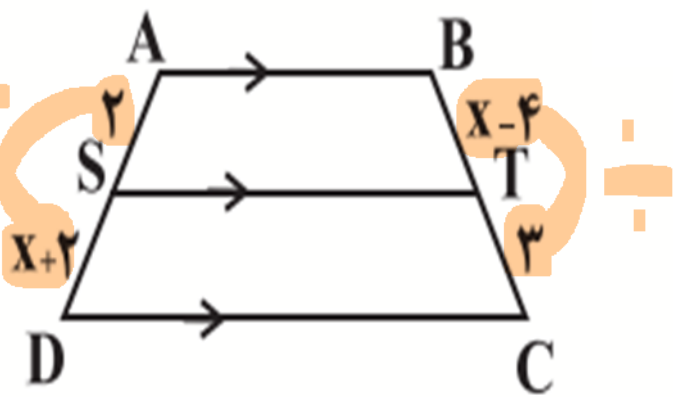
نیم مماس‌ها $\Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) : f' = \frac{1}{3}x^2 - 2 \underline{x=1} = \frac{1}{3} \\ f'_-(1) : f' = 2x \underline{x=1} = 2 \end{cases}$

نقطه $(-7, 1) \Rightarrow$ مماس $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 7) \xrightarrow{x=0} y = -\frac{25}{3}$

نقطه $(-7, 8) \Rightarrow$ مماس $y - 8 = 2(x + 7) \xrightarrow{x=0} y = 22$

$$\overline{AB} = \left| -\frac{25}{3} - 22 \right| = \left| \frac{-25 - 66}{3} \right| = \left| \frac{-91}{3} \right| = \frac{91}{3} = \frac{90+1}{3} = 30 + \frac{1}{3} \rightarrow 30$$

۱۶۱- در ذوزنقه مقابل اگر $AB \parallel ST \parallel DC$ باشد، مقدار x کدام است؟



$$2 + 2\sqrt{15} \quad (2)$$

$$2 + \sqrt{15} \quad (1)$$

$$1 + 2\sqrt{15} \quad (4)$$

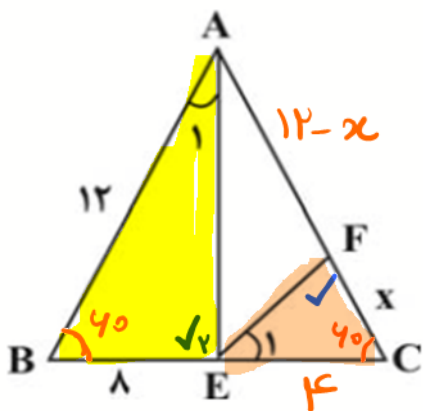
$$1 + \sqrt{15} \quad (3) \checkmark$$

$$\frac{2}{x+2} = \frac{x-4}{3} \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 4$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0 \quad \Delta = 4 - 4(-12) = 4(1+12) = 4 \times 13$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 \times 13}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{13})}{2} = 1 \pm \sqrt{13} \quad x > 4$$

۱۶۲- در شکل رو به رو مثلث ABC متساوی الاضلاع است. مقدار x کدام است؟ $(\hat{A}_1 = \hat{E}_1)$



$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3) \checkmark$$

$$E_1 = A_1 \quad F = E_1$$

$$\frac{x}{12} = \frac{4}{12} \rightarrow x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۱۶۳- اگر $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \alpha$ باشد، کدامیک از نسبت‌های زیر برابر $\alpha^2 + 2\alpha + 1$ است؟

$x = r$ $a = r$ $\alpha = r$
 $y = 1$ $b = r$

$$1 + \left(\frac{y}{r}\right)^r$$

$\left(\frac{x+a}{y+b}\right)^r$ (۲) \times $\leftarrow \xi + \xi + 1 = 9$

$\frac{(x+y)(a+b)}{yb}$ (۱) \checkmark

$\frac{(x-y)(a+b)}{by}$ (۴) \times

$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^r$ (۳) \times

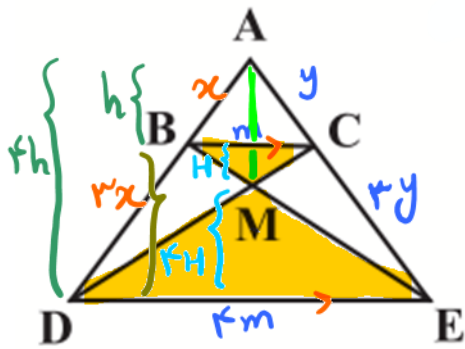
$\frac{1 \times r}{r} = r$

۱۶۴- در شکل مقابل، $BC \parallel DE$ و $AD = \frac{1}{3}AB$ است. نسبت مساحت مثلث ABC به MBC کدام است؟

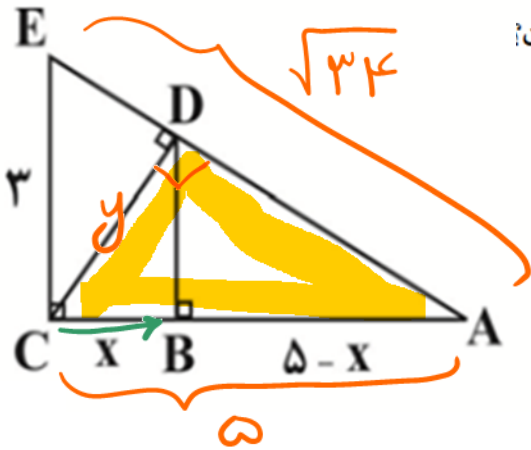
$\frac{S_{ABC}}{S_{MBC}} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times h}{\frac{1}{2} \times BC \times H}$

$\frac{2n+1}{n-1}$ (۲) $\leftarrow \frac{9}{3}$
 $\frac{n-1}{n+1}$ (۱) $\leftarrow \frac{2}{3}$
 $\frac{n+1}{n-1}$ (۴) \checkmark
 $\frac{2n-1}{n+1}$ (۳) $\leftarrow \frac{1}{5}$

$H + rH = r'h \rightarrow rH = r'h \rightarrow \frac{r}{r'} = \frac{h}{H}$



۱۶۵- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه x کدام است؟



$\frac{35}{34}$ (۲)
 $\frac{45}{34}$ (۴) \checkmark
 $\frac{9}{34}$ (۱)
 $\frac{47}{34}$ (۳)

$y^2 = x \times 3 \rightarrow y = \sqrt{3x}$

$y = \frac{r \times \omega}{\sqrt{38}} \rightarrow \sqrt{3x} = \frac{r \times \omega}{\sqrt{38}} \rightarrow \omega x = \frac{r^2 \times \omega^2}{38} \rightarrow x = \frac{r^2 \omega}{38}$

۱۶۶- مثلثی به اضلاع a، ۴ و ۳ با مثلثی به طول اضلاع b، ۶ و ۵ متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای b کدام است؟

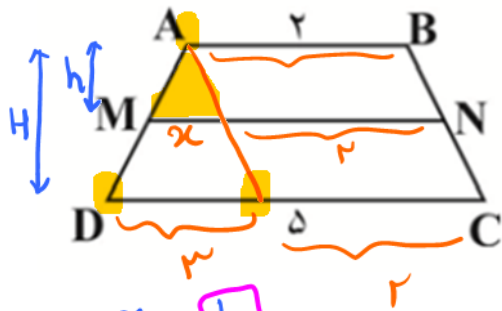
۱۵ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۷ (۱)

ب بزرگترین ضلع
است و دم

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{3} \rightarrow X \\ \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \rightarrow X \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{3} = \frac{4}{a} = \frac{5}{3} \rightarrow b = \frac{20}{3} \\ \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = \frac{5}{a} \rightarrow b = 1 \checkmark \end{array} \right.$$

۱۶۷- در دوزنقه روبرو طول قاعده‌ها ۲ و ۵ است. پاره‌خطی موازی قاعده، سطح دوزنقه را نصف می‌کند. طول این پاره‌خط چقدر است؟



- $\frac{\sqrt{29}}{2}$ (۲)
- $\frac{7}{2}$ (۱)
- $\frac{\sqrt{58}}{2}$ (۳) ✓
- $\sqrt{10}$ (۴)

$S_{\text{دوزنقه}} = 2 \times S_{\text{دو مثلث}}$

$$\frac{v}{2} \times H = 2 \times \frac{(x+2) \times h}{2}$$

$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{h}{H}$

$MN = x + 2$

$v = 2(x+2) \left(\frac{h}{H}\right) \rightarrow \frac{x}{3}$

$v = \frac{2}{3} x(x+2) \rightarrow 21 = 2x(x+2)$

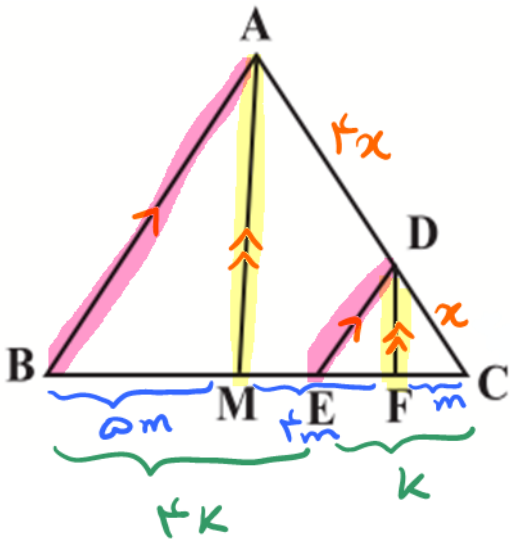
$\div 2 \rightarrow 10.5 = x^2 + 2x \rightarrow 14.5 = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+2)^2}$

$\rightarrow 14.5 = MN^2 \rightarrow MN = \sqrt{14.5} = \sqrt{\frac{29}{2}}$

$\rightarrow MN = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$

۱۶۸- در مثلث ABC مطابق شکل $\frac{AD}{DC} = 4$ و پاره خط DE موازی AB و AM میانه ضلع BC و

DF موازی AM است. طول پاره خط EF چه نسبتی از طول BC است؟



$$\frac{EF}{BC} = ?$$

$$\frac{m}{4m} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

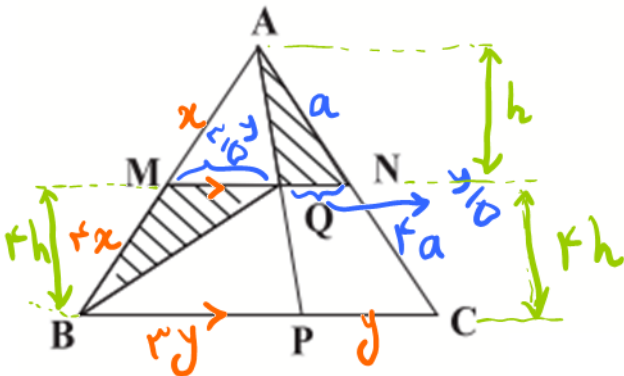
$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{10} \quad (4) \checkmark$$

$$\frac{1}{20} \quad (3)$$

$$BC = 4m = 2k \rightarrow \boxed{k = 2m}$$

۱۶۹- در مثلث ABC داریم، $MN \parallel BC$ و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$ و نیز $PC = PB$ می باشد. مساحت مثلث BMQ چند برابر AQN است؟



$$\frac{S_{BMQ}}{S_{AQN}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4x \times \frac{1}{4}h}{\frac{1}{2} \times a \times \frac{3}{4}h} = \frac{12}{1} = 12$$

$$6 \quad (1)$$

$$8 \quad (2)$$

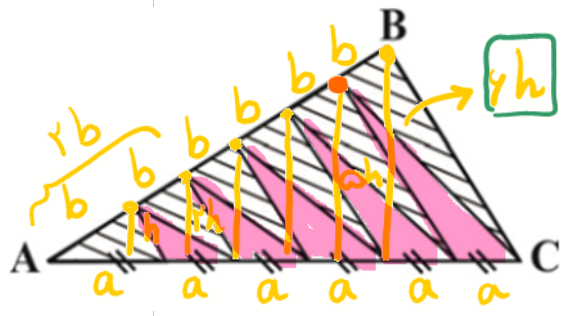
$$15 \quad (3)$$

$$12 \quad (4) \checkmark$$

$$\text{تالس اول: } \frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BP} \rightarrow \frac{x}{5x} = \frac{MQ}{2y} \rightarrow MQ = \frac{2y}{5}$$

$$\text{تالس دوم: } \frac{AN}{AC} = \frac{QN}{PC} \rightarrow \frac{a}{4a} = \frac{QN}{y} \rightarrow QN = \frac{y}{4}$$

۱۷۰- در شکل زیر AB و AC به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. نسبت مساحت



قسمت‌های سایه زده شده به مساحت قسمت‌های سفید چقدر است؟

$$\frac{S_{\text{سایه زده}}}{S_{\text{سفید}}} = \frac{\frac{21}{2}ha}{\frac{15}{2}ha} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

- $\frac{8}{7}$ (۲)
- $\frac{7}{5}$ (۴) ✓

- $\frac{9}{7}$ (۱)
- $\frac{6}{7}$ (۳)

$$S_{\text{قسمت‌های سفید}} = \frac{h \times a}{2} + \frac{2h \times a}{2} + \frac{3h \times a}{2} + \frac{4h \times a}{2} + \frac{5h \times a}{2} = \frac{h \times a}{2} (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \frac{15}{2} ha$$

$$S_{\text{کل}} = \frac{6h \times 6a}{2} = 18ha \Rightarrow S_{\text{قسمت‌های سایه زده}} = \frac{18}{1} ha - \frac{15}{2} ha = \frac{21}{2} ha$$