

۱- نیم‌مهر یک ماده رادیواکتیو ۲۰ دقیقه است. اگر ۲۵۶ میلی‌گرم از این ماده را در اختیار داشته باشیم، پس از گذشت ۲ ساعت، چند میلی‌گرم از آن باقی می‌ماند؟

$$\frac{256 \times 2}{20} = 25.6$$

۱۶ (۳)
۱ (۴)

۶۴ (۱)

۴ (۳)

۲- اگر $f^{-1}(x) + f(x) = 7 + 2x$ ، آنگاه ضابطه f کدام است؟

$$256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2 \times 60}{20}} = 256 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = 256 \times \frac{1}{64} = 4$$

۱ (۳)

۴ (۳)

۲- اگر $f^{-1}(x) + f(x) = 7 + 2x$ ، آنگاه ضابطه f کدام است؟

$$\frac{x + 22}{4} \quad (۳)$$

$$x + 22 \quad (۴)$$

$$\frac{x - 11}{4} \quad (۱)$$

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow f^{-1}(f(x)) + f(x) = 7 + 2f(x)$$

$$f(x) = 7 + 2x \rightarrow f^{-1}(7 + 2x) = 11 + 2x \quad x \rightarrow f(x)$$

$$f^{-1}(7 + 2x) = 11 + 2x \rightarrow f(x) = \frac{x - 11}{2} \quad \frac{f(f(x))}{f(x) - 11}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{11}{2} = \frac{x - 11}{2}$$

$g(x) = \frac{2x-6}{x-1}$ و $f = \{(2,3), (0,2), (-1,1), (-2,4)\}$ کدام است؟
 نگاه تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است؟
 $\{(2, -3), (4, 5)\} \sigma$
 $\{(2, -3), (3, 0)\} \sigma$

$\{(2, \frac{1}{3}), (2, -3), (1, 0)\} \sigma$
 $\{(1, 5), (-2, -3)\} \sigma$

اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، برد تابع $f \circ f$ کدام است؟

$f = \{(3, 2), (2, 0), (1, 1), (4, -3)\}$

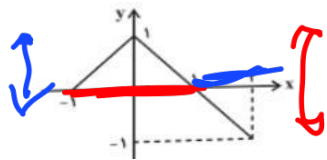
$U_g = \mathbb{R} - \{1\}$ و $g(x) \neq 0 \rightarrow \frac{2x-6}{x-1} \neq 0 \rightarrow x \neq 3$

$U \rightarrow \{2, 4\}$

$\{(2, -3), (3, 0)\} \sigma$

$\{(4, 5), (-2, -3)\} \sigma$

اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، برد تابع $f \circ f$ کدام است؟



- $(0, 1) \sigma$
- $(1, 1) \sigma$
- $(-1, 1) \sigma$
- $(-1, 1) \sigma$

$f \circ f(x) \Rightarrow \mathbb{R} = [0, 1]$

$r < A < r$ (f)

$A > 1$ (f)

$A^{109} = 1 = B$

معادله - 9
 $\log \frac{(x+r)}{r} = \Delta$
 $\log \frac{(rx^r + rx + r)}{r} = \Delta$
 دارای چند جواب است؟
 (1) صفر
 (2) 2
 (3) 3
 (4) 4

$\log \frac{(rx^r + rx + r)}{r} = \Delta$
 $\log (rx^{r-1} + x + 1) = \Delta$
 $rx^{r-1} + x + 1 = 10^\Delta$
 $rx^{r-1} + x = 10^\Delta - 1$
 $x^r = \frac{10^\Delta - 1}{r}$
 $x = \left(\frac{10^\Delta - 1}{r}\right)^{1/r}$

$(r^r)^{n+r} = r^{r \cdot \log r^{n+r}} = r^{(n+r) \log r}$

$(n+r)^r = (r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^n)$

$n - n - r = 0 \rightarrow a < 2 < b \quad n < -1, r$

10- یک زلزله 25 برابر یک زلزله دیگر انرژی آزاد کرده است. اختلاف بزرگی شدت دو زلزله تقریباً چند ریشتر است؟ ($\log 2 = 0.3$)

$E_1 = 25 E_2$
 $\log \frac{E_1}{E_2} = 1$

$\frac{14}{18} (M_2 - M_1)$

$(\log E = 11/8 + 1/8 M)$

$\frac{11}{18} (M_2 - M_1)$

$\frac{11}{18} (M_2 - M_1)$

$\log 25 = 11/8 + 1/8 (M_2 - M_1)$
 $\log 25 = 11/8 + 1/8 (M_2 - M_1)$

$\log \frac{25 E_1}{E_2} = 11/8 + 1/8 (M_2 - M_1)$
 $\log 25 + \log \frac{E_1}{E_2} = 11/8 + 1/8 (M_2 - M_1)$
 $\log \frac{E_1}{E_2} = 11/8 + 1/8 (M_2 - M_1) - \log 25$

$1/8 = 1/8 (M_2 - M_1) \rightarrow M_2 - M_1 = \frac{1/8}{1/8} = 1$

۱۱- ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

~~$y = \frac{|x|-1}{|x|}, |x| < 1$~~ (۴)
 ~~$y = \frac{x}{|x|-1}; |x| > 1$~~ (۳)
 ~~$y = \frac{1-|x|}{|x|}; |x| > 1$~~ (۲)
 $y = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$ (۱)

$x < 0 \rightarrow y > 0$

$x < 1 \rightarrow \frac{f}{x} < 1$

۱۲- اگر $f(x) = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1}$ و $g(x) = 3x - \sqrt{x+1}$ ، آنگاه برد تابع $f+g$ کدام است؟

$(-3, +\infty)$ (۴)
 $[-2, +\infty)$ (۳)
 $[0, +\infty)$ (۲)
 $[-1, +\infty)$ (۱)

$0 \leq x \rightarrow [-1, +\infty)$

$$\frac{(\sqrt{x+2} + 1) + (\sqrt{x+1} + 1)}{\sqrt{x+1} + 1}$$

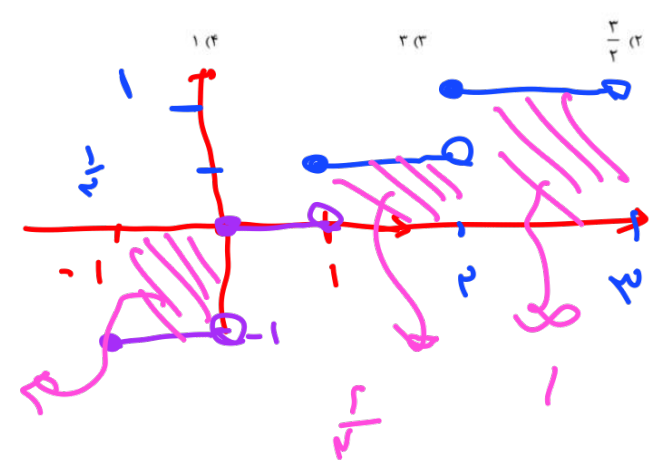
~~$x \rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + 1 \geq x+1$~~

$[-2, +\infty)$

$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = [x]$ ، آنگاه مساحت سطح بین نمودار تابع $f \circ g$ با محور x ها، کدام است؟ (|)، نماد جزء صحیح است.

$-1 < [x] < 0$
 $-1 < x < 0$
 $0 < [x] < 1$
 $0 < x < 1$
 $1 < [x] < 2$
 $1 < x < 2$

$f(g(x))$



$-\frac{5}{2} < x < 0 \rightarrow -1$

$-1 < x < 1 \rightarrow 0$

$0 < [x] < 1$

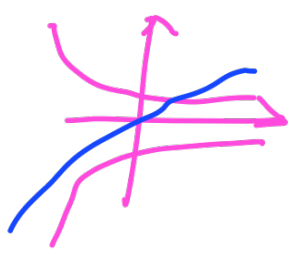
$1 < [x] < 2$

$1 < x < 2$

$1 < x < 2 \rightarrow \frac{1}{2}$

$2 < x < 3 \rightarrow 1$

$1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$



معنی می باشد. دامنه تابع $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ را $y = \sqrt{x}$ کدام است؟

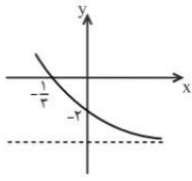
- $(-\infty, +\infty)$ (۳)
- $(-\infty, 0)$ (۲)
- $[0, +\infty)$ (۴)
- $[-1, 1]$ (۱)

$1 - (\frac{1}{2})^x = 0$

$(\frac{1}{2})^x = 1$

$f(x)$	-	0	+
x	-	0	+
	+	0	+

۱۵- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟



Handwritten work for problem 15:

$$f(x) = -4 + 2^{ax+b}$$

At $x = 0$, $f(0) = -2$:
 $-2 = -4 + 2^{a \cdot 0 + b} \Rightarrow 2 = 2^b \Rightarrow b = 1$

At $x = -\frac{5}{3}$, $f(-\frac{5}{3}) = 60$:
 $60 = -4 + 2^{a(-\frac{5}{3}) + 1} \Rightarrow 64 = 2^{-\frac{5a}{3} + 1}$

Since $64 = 2^6$, we have:
 $6 = -\frac{5a}{3} + 1 \Rightarrow 5 = -\frac{5a}{3} \Rightarrow a = -3$

Therefore, $f(x) = -4 + 2^{-3x+1}$.
 $f(-\frac{5}{3}) = -4 + 2^{-3(-\frac{5}{3})+1} = -4 + 2^{5+1} = -4 + 64 = 60$

- ۵۴ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۴۸ (۳)
- ۲۸ (۴)

Handwritten work for problem 15 (continued):

For $x = 0$:
 $-2 = -4 + 2^b \Rightarrow 2 = 2^b \Rightarrow b = 1$

For $x = -\frac{5}{3}$:
 $60 = -4 + 2^{a(-\frac{5}{3}) + 1} \Rightarrow 64 = 2^{-\frac{5a}{3} + 1}$
 $2^6 = 2^{-\frac{5a}{3} + 1} \Rightarrow 6 = -\frac{5a}{3} + 1 \Rightarrow 5 = -\frac{5a}{3} \Rightarrow a = -3$

۱۶- نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(2)$ کدام است؟

Handwritten work for problem 16:

$$1 \rightarrow 1 - 1 = 0$$

$$2 \rightarrow 2^2 - 2 = 2$$

Handwritten work for problem 16:

$$f(2) = -2 + (\frac{1}{2})^{2A+B}$$

Handwritten work for problem 16:

$$f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{Ax+B}$$

Handwritten work for problem 16:

$$-2 + 2^x$$

$$-2 + 2^2 = -2 + 4 = 2$$

Handwritten work for problem 16 (continued):

At $x = 1$, $f(1) = 0$:
 $0 = -2 + (\frac{1}{2})^{A+B} \Rightarrow 2 = (\frac{1}{2})^{A+B} \Rightarrow 2 = 2^{-A-B} \Rightarrow A+B = -2$

At $x = 2$, $f(2) = 2$:
 $2 = -2 + (\frac{1}{2})^{2A+B} \Rightarrow 4 = (\frac{1}{2})^{2A+B} \Rightarrow 4 = 2^{-2A-B} \Rightarrow -2A-B = 2$

Solving the system:
 $A+B = -2$
 $-2A-B = 2$
 \hline
 $3A = -4 \Rightarrow A = -\frac{4}{3}$
 $B = -2 - A = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

Therefore, $f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}}$.
 $f(2) = -2 + (\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}(2) - \frac{2}{3}} = -2 + (\frac{1}{2})^{-\frac{10}{3}}$

17- قرینه تابع $y = 1 - \log_3 \sqrt{3x-2}$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، محور عرض‌ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

لازمه عرض از مبدا



طول از مبدا f

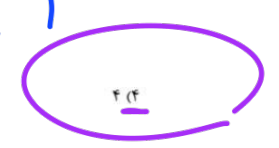
$(x-1) > 9$

$1 - \log_3 \sqrt{3x-2} = 0 \rightarrow \log_3 \sqrt{3x-2} = 1$

$\sqrt{3x-2} = 3 \rightarrow 3x-2 = 9 \rightarrow 3x = 11 \rightarrow x = \frac{11}{3}$

$\log_3 \sqrt{3x-2} = 1 \rightarrow \log_3 \sqrt{3x-2} = \log_3 3$

$\log_{21} 147 + \log_{21} 3 = 1$



18- حاصل عبارت $(\log_{21}(3))^2 + \log_{21}(147) \log_{21}(1323)$ کدام است؟

$\log_{21} 3$ and $\log_{21} 147$

$\log_{21} 147 = \log_{21} 3 + \log_{21} 49 = \log_{21} 3 + 2 \log_{21} 7$

$\log_{21} 1323 = \log_{21} 3 + \log_{21} 441 = \log_{21} 3 + 2 \log_{21} 21$

$\log_{21} 1323 = \log_{21} 3 + 2 \log_{21} 3 + 2 \log_{21} 7 = 3 \log_{21} 3 + 2 \log_{21} 7$

$t^2 + (t-t)(t+t) = t^2 + 0 = t^2$

۱۹- اگر $\log_2 3 = 0.8$ باشد، مقدار $\log_2 6$ ، کدام است؟

Handwritten work for problem 19:

$$\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + 0.8 = 1.8$$

Other notes include: $\frac{13}{18}$ (circled), $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, and $\frac{1}{9}$.

۲۰- از معادله لگاریتمی $\log_2(2x^2+1) - \log_2(x+2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $\log_2(x-1)$ در پایه ۸ کدام است؟

Handwritten work for problem 20:

$$\log_2 \frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 2$$

$$2x^2+1 = 2(x+2) \Rightarrow 2x^2+1 = 2x+4 \Rightarrow 2x^2-2x-3 = 0$$

$$x = -1 \text{ and } x = \frac{3}{2}$$

Since $x > 1$ for $\log_2(x-1)$ to be defined, $x = \frac{3}{2}$.

$$\log_2 \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1$$