

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
معادله‌ها و نامعادله‌ها
فصل ۳ از ابتدای توان‌های گویا تا
پایان فصل و فصل ۴ تا پایان فصل
صفحه‌های ۵۹ تا ۹۳

$$16\sqrt{3} \quad (4)$$

۱- اگر $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{x}$ و $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{x}$ حاصل عبارت $A = \frac{(2^y+1)^x}{x^y}$ کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (3)$$

$$\frac{19}{3} \quad (2)$$

$$\frac{19}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\rightarrow x = 2\sqrt{4} = 4$$

$$A = \frac{(2^y + 1)^x}{x^y} = \frac{2^{yx} + 1^x}{x^y} = \frac{(2^4)^4 + 1^4}{4^4} = \frac{2^4 \times 16}{(2^2)^4} = \frac{4 \times 16}{(2^4)^2} = \frac{64}{16} = 4$$

$$\rightarrow \frac{4 \times 16}{16} = 4$$

۲- ساده شده عبارت $(1 - \sqrt{2} + \sqrt{4}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{4} + \sqrt{3}\sqrt{2})$ کدام است؟

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{3} \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{4}) \xrightarrow{\text{جان دلاغر}} 1 + 2 = 3$$

۳- هرگاه $a + a^{-1} = 3$ و $a \neq 0$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $a^3 + \frac{1}{a^3} - 2$ کدام است؟

۱۲ (۴) $a + \frac{1}{a} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۳}}$ $a^3 + \frac{1}{a^3} + 2 = 4 \rightarrow a^3 + \frac{1}{a^3} = 2$ ۱۴ (۱)

۱۶ (۴) $a^3 + \frac{1}{a^3} = (a + \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2} - 1) = 3 \times 2 = 6$ ۱۸ (۲)

۴- اگر $A = \sqrt[3]{15 + 4\sqrt{14}} + \sqrt[3]{15 - 4\sqrt{14}}$ باشد، حاصل $A^3 - 3A$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۲۲ (۳)

۲۷ (۲)

۳۰ (۱)

$A^3 = 15 + \cancel{4\sqrt{14}} + 15 - \cancel{4\sqrt{14}} + 3\sqrt[3]{15^2 - 14 \times 14} \times A$

$A^3 = 30 + 3A$

$A^3 - 3A = 30$

۵- اگر معادله $4x^2 + mx + \frac{3}{4} = 0$ بدون نیاز به اضافه یا کم کردن عددی با روش مربع کامل سازی قابل حل باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای

m کدام است؟

$4\sqrt{3}$ (۴)

۴ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۲ (۱)

$$\Delta = 0 = m^2 - 4 \left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\rightarrow m^2 - 3 = 0$$

$$m = \pm \sqrt{3}$$

۶- اگر a ریشه مضاعف و مثبت معادله $ax^2 + bx + a^2\sqrt{3} = 0$ باشد، حاصل $b - a^2$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

-۹ (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

۹ (۱)

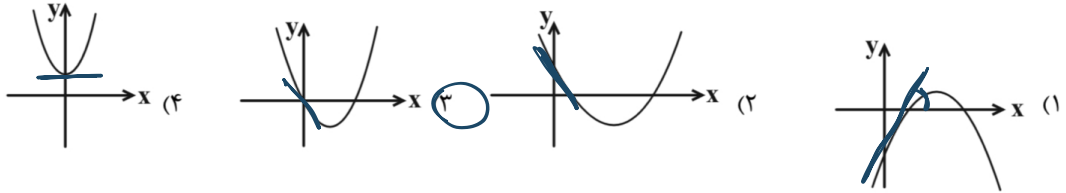
$$\begin{aligned} a(n-a)^2 &= a(n^2 - 2an + a^2) = an^2 - 2a^2n + a^3 \\ &= an^2 + bn + a^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$b - a^2 = -9 - 3 = -12$$

$$-2 \times 3 = b = -6$$

۷- در کدام یک از سهمی‌های زیر، به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ حاصل $a-b-c$ قطعاً عددی مثبت است؟



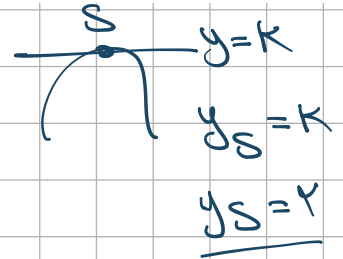
| | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| $a > 0$ | $a > 0$ | $a > 0$ | $a < 0$ |
| $b = 0$ | $b < 0$ | $b < 0$ | $b > 0$ |
| $c > 0$ | $c = 0$ | $c > 0$ | $c < 0$ |

$$\begin{matrix} \oplus & \ominus & \ominus & = & \oplus \\ \oplus & \oplus & \oplus & & \\ \oplus & & & & \end{matrix}$$

۸- اگر نمودار سهمی $y = 2x^2 - 8x + m$ بر خط $y = 2$ مماس باشد، ریشه کوچکتر معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ریشه ندارد.

$$x_g = \frac{-b}{2a} = 2$$

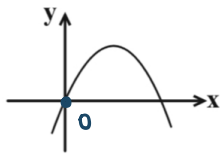


$$y_S = 2x^2 - 8x + m = 2 \rightarrow m = 10$$

$$2x^2 - 8x + 10 = 0$$

ریشه ندارد $\rightarrow \Delta < 0$

۹- هرگاه نمودار سهمی $y = ax^2 + (1-2a)x + a^2 - 4$ به شکل زیر باشد، مختصات رأس سهمی کدام است؟



$$ax^2 - \Sigma = 0 \rightarrow ax = \frac{2}{x} - 2$$

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{8}\right) \text{ (1)}$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right) \text{ (2)}$$

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right) \text{ (3)}$$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right) \text{ (4)}$$

$$y = -2x^2 + (1+\Sigma)x = -2x^2 + 2x$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$y_s = \frac{1}{2}$$

۱۰- کمترین مقدار سهمی $y = x^2 - 2mx + m - 3$ ، بیش تر از -15 نیست. مجموع اعداد صحیحی که محدوده m آنها را شامل نمی‌شود، کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

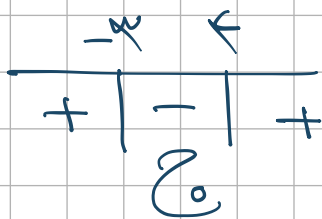
۳ (۲)

۱ (۱) صفر
↓
 y_s

$$x_s = \frac{-b}{2a} = m \rightarrow y_s = -m^2 + m - 3 \leq -15$$

$$+m^2 - m - 12 \geq 0$$

$$(m-4)(m+3) \geq 0$$



$$\rightarrow -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$k_S = k_S = 1$$

۱۱- هرگاه محور تقارن سهمی $y = x^2 + (m-1)x + 2m$ خط $2x - y = 1$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند، آنگاه این سهمی محور y ها را

$$y=1 \quad 2x - 1 = 1$$

در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$-2 \quad \textcircled{4} \quad \underline{k=1} \quad 1 \quad (3)$$

-1 (2)

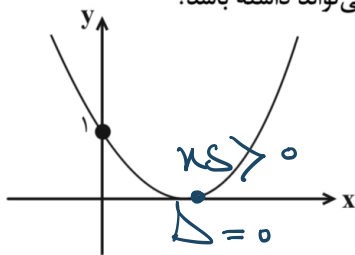
2 (1)

$$k_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{m-1}{2} = 1 \rightarrow m = -1$$

$$y = x^2 - 2x - 2$$

$$y = 0 \rightarrow \text{عرض از مبدا} = -2$$

۱۲- نمودار سهمی $f(x) = mx^2 + (m-3)x + 1$ به شکل زیر است. m چند مقدار مختلف صحیح می‌تواند داشته باشد؟



$$m > 0$$

$$k_S > 0 \rightarrow -\frac{m-3}{2m} > 0$$

$$m < 3$$

(1) صفر

1 (2)

2 (3)

4 (4)

$$\Delta = 0 \rightarrow (m-3)^2 - 4(m)(1) = 0 \rightarrow m^2 - 10m + 9 = 0$$

$$\rightarrow m = 1, 9$$

۱۳- نقطه $(5, 2)$ مختصات رأس یک سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ می باشد. اگر نمودار این سهمی پاره خطی به طول ۶ واحد روی محور

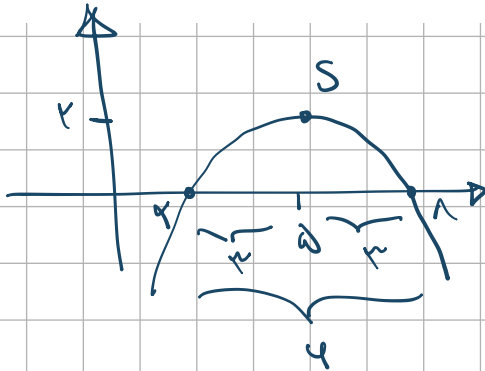
طولها جدا کند، عرض نقطه برخورد این سهمی با محور y ها کدام است؟

$$-\frac{22}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{22}{9} \quad (3)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (1)$$



$$y = a(x-2)(x-8) \quad y = -\frac{2}{9}(x-2)(x-8)$$

$$\xrightarrow{(5, 2)} a = -\frac{2}{9}$$

عرض از مبدأ $x=0 \rightarrow y = -\frac{2}{9}x - 2x - 8$

$$= -\frac{22}{9}$$

۱۴- عبارت $A = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-1)}$ در x های مثبت در بازه $(a, +\infty)$ منفی است. حداقل مقدار a کدام است؟

$$x > 0 \rightarrow x(x+1) > 0$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

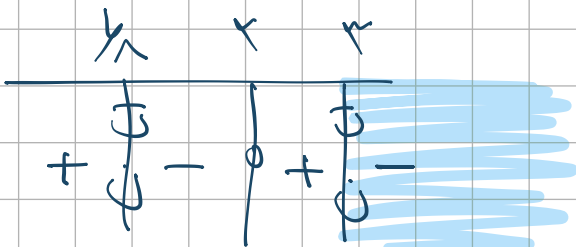
$$2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-1)} > 0$$

$x > 2 \rightarrow x-2 > 0$
 $x < 1 \rightarrow x-1 < 0$

$$a = 2$$



۱۵- اگر جدول تعیین علامت عبارت $y = (k^2 - 9)x^2 + kx + 4$ به صورت مقابل باشد، آنگاه $k + 3t$ کدام است؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | | t | |
| y | - | | + |

$$\begin{matrix} -1 \text{ (2)} \\ \frac{2}{3} \text{ (4)} \end{matrix}$$

$$\neq 0$$

$$4 \text{ (1)}$$

$$1 \text{ (3)}$$

$$k^2 - 9 = 0 \rightarrow k = 3, -3 \rightarrow \begin{matrix} 3k + \Sigma \\ -3k + \Sigma \end{matrix}$$

$$k + 3t = 3 - \Sigma = -1$$

۱۶- اگر جدول تعیین علامت عبارت $A = ((k-2)x + m-1)(x-3n)^2$ به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{k+m}{n}$ کدام است؟

| | | | | | |
|---|---|----|---|---|---|
| x | | -3 | | 1 | |
| A | + | | + | | - |

$$\begin{matrix} -3 \text{ (2)} \\ \frac{1}{3} \text{ (4)} \end{matrix}$$

$$-3 - 3n = 0$$

$$\rightarrow n = -1$$

$$3 \text{ (1)}$$

$$\frac{-1}{3} \text{ (3)}$$

$$k - 2 + m - 1 = 0 \rightarrow k + m = 3$$

$$\frac{k+m}{n} = \frac{3}{-1}$$

۱۷- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۴)

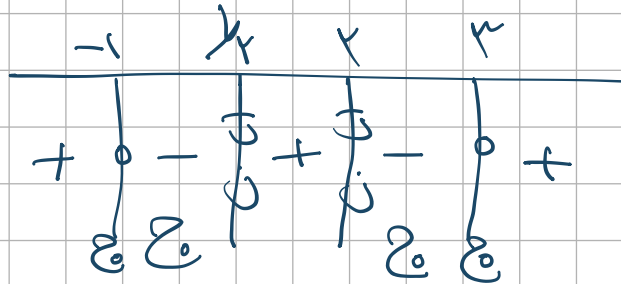
۲ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+2)(x-2) - (2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

$\rightarrow 2, \frac{1}{2}$



$$[-1, \frac{1}{2}) \cup (2, 3] \rightarrow 2, 0, -1$$

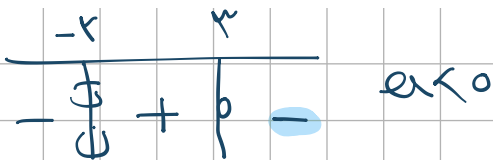
۱۸- علامت عبارت $\frac{ax+1}{x-b}$ فقط در بازه $(-2, 3]$ نامنفی است. حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

$-\frac{4}{3}$ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

-۴ (۱)



$$\frac{1}{x-3} \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{b}{a} = 4$$

$$\frac{1}{x+2} \rightarrow b = -2$$

۱۹- به ازای $x < k$ ، نامعادله $|x-1| > x$ برقرار می‌باشد (بیشترین) مقدار k کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

$$x \geq 0 \rightarrow |x-1| > x \rightarrow (x-1)^2 > x^2 \rightarrow x < \frac{1}{4}$$

$$x < 0 \rightarrow |-x-1| > x \text{ همیشه برقرار است}$$

$$\rightarrow (-\infty, \frac{1}{4})$$

۲۰- مجموعه جواب $|x^2 - 2x| < x$ به صورت (a, b) می‌باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

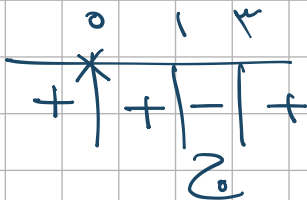
۳ (۲)

۴ (۱)

$$x \geq 0 \xrightarrow{\text{توانیم}} (x^2 - 2x)^2 < x^2 \rightarrow (x^2 - 2x - x)(x^2 - 2x + x) < 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 3x)(x^2 - x) < 0 \rightarrow x^2 (x-3)(x-1) < 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 3 \end{array}$$



$$\rightarrow (0, 1) \cup (3, \infty)$$