$f(1)=7$ $\quad f'(2)=4$

$f(-5)=-7$ $\quad f'(-5)=2$

۱- خط $y=2x+3$ در دو نقطه $x=2$ و $x=-5$ بر نمودار تابع f مماس است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)+f(h-5)}{h}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -4 ۴) ۴

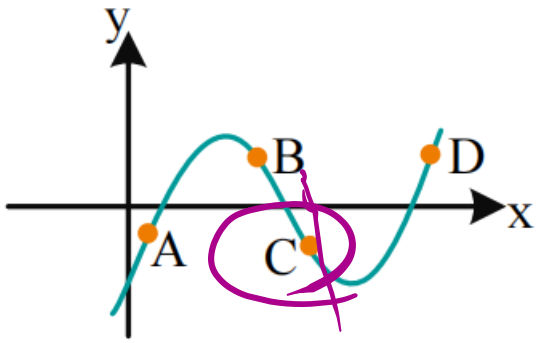
$x=a \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a)}{h}=mf'(a)$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)+f(h-5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}+\dfrac{f(-5+h)-f(-5)}{h}\right)$

$\underbrace{\qquad\qquad h\to 0 \qquad\qquad}$

$=f'(2)+f'(-5)=2+2=4$

۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر $f(\alpha)$ و $f'(\alpha)$ ریشه‌های معادله $3x^2+7x+2=0$ باشند، آن‌گاه α طول کدام نقطه مشخص شده می‌تواند باشد؟



۱) A

۲) B

۳) C

۴) D

$S = -\frac{7}{3} < 0$

$P = \frac{2}{3} > 0$ ⟶ هر دو منفی

هر دو مثبت ← $f'(\alpha)$ و $f(\alpha)$

۳- اگر $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۲m$ و $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۳}{x-\sqrt{۲x}}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-mh)-۳}{h}$ باشد، مقدار غیرصفر $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

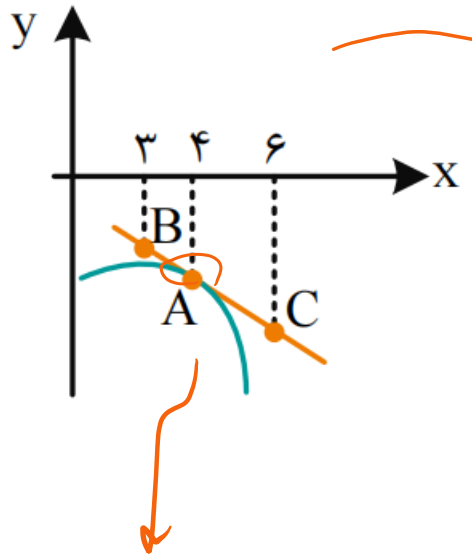
$-mf'(۲)$

$\lim \frac{۳-۳}{۲-۲}=\frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim \frac{f(m)-۳}{m-\sqrt{۲m}} \times \frac{m+\sqrt{۲m}}{m+\sqrt{۲m}} = \lim \frac{(f(m)-۳)(m+\sqrt{۲m})}{m^۲-۲m}$

$= \lim \frac{f(m)-۳}{m-۲} \times \frac{۴}{۲} = ۴m$

$-mf'(۲)=۴m \Rightarrow -۲m=۴m \Rightarrow -۶m=۴ \Rightarrow m=-۲$

۴- در شکل زیر، نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $x=۴$ رسم شده است. اگر $\lim_{x\to ۴}\frac{f^{۲}(x)-۹}{x-۴}=۳$ باشد، مجموع عرض‌های نقاط B و C چقدر است؟



۱) ۶-

۲) ۶/۵-

۳) ۵-

۴) ۵/۵-

$\lim \frac{f(x)-۳}{x-۴} \times \frac{f(x)+۳}{۱} = f'(۴)(۶) = ۳$

$x \to ۴$

$f(۴)$

$f'(۴) = -\frac{۱}{۲}$

$y-(-۳) = -\frac{۱}{۲}(x-۴) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + ۲ - ۳$

$y = -\frac{۱}{۲}x - ۱$

$-\frac{۳}{۲} - ۱ = -\frac{۵}{۲}$

$-۳-۱=-۴$

$2+a=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{5}{2}$

۵- خط گذرنده از نقاط $A(0,a)$ و $B(-a,-a)$ در نقطه $x=1$ بر نمودار تابع $y=f(x)$ مماس است. اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(1-2h)-f^2(1)}{h^2-h}=-4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

$m_{AB}=\frac{a-(-a)}{0-(-a)}=\frac{2a}{a}=2 \longrightarrow y-a=2(x-0)$

$y=2x+a$ ($x=1$: $2+a$)

$y'=2$

$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}\times\frac{f(1-2h)+f(1)}{h-1}\right)=-2f'(1)\times\frac{2f(1)}{-1}=-4$

$\Rightarrow +2f'(1)\,2f(1)=-4$

$4(2)(2+a)=-4$

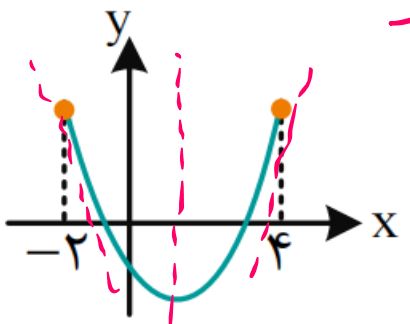
۶- تابع متناوب f با دورهٔ تناوب ۶ مفروض است. اگر نمودار f در بازهٔ $[-۲,۴]$ به صورت سهمی مقابل و $f'(۲)+f'(a)=۰$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۸

۲) ۱۹

۳) ۲۰

۴) ۲۲



$x=1$

$f'(۲)=-f'(۰)$

$f(۰)=f(۴k)$

$f(\alpha)=f(\beta) \Rightarrow f'(\alpha)=-f'(\beta)$

$f(۰)=f(۴k)$ Stewart

۷- اگر $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{2x+[\cos \pi x]}$ باشد، حاصل $f'(1)-f'(2)$ کدام است؟

۱) $-1/75$ ۲) $-1/6$ ۳) $-1/2$ ۴) $-1/25$

$\lim_{x\to 1} [\cos \pi x] = [-1^+] = -1$

$\lim_{x\to 2} [\cos \pi x] = [1^-] = 0$

$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{2x+[\cos \pi x]} \times (x-1)' = 1 \times \frac{-1}{2-1} = -1$

$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{2x+[\cos \pi x]} (x-2)' = 1 \times \frac{1}{4+0} = \frac{1}{4}$

$f'(1) - f'(2) = -1 - \frac{1}{4} = -1/25$

۸- اگر $f'(۲)=-۳$ و $\lim\limits_{h\to\infty} h\times(f(۲-\frac{۳}{h})-a)=۶a$ موجود و متناهی باشد، مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۳

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

$\frac{۱}{h}=t \xrightarrow{h\to\infty} t\to ۰ \Rightarrow \lim\limits_{h\to\infty} h\times f(۲-\frac{۳}{h})-a = \lim\limits_{t\to ۰} \frac{f(۲-۳t)-a}{t}$

$= -۳ f'(۲) = ۶a$

-۳

$a=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$

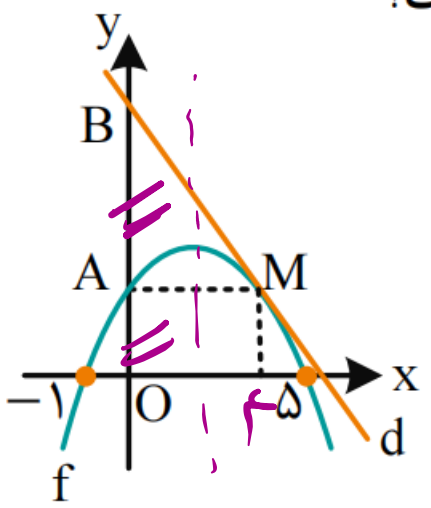
۹- در شکل مقابل، خط **d** بر سهمی **f** مماس است. طول پاره‌خط **AB** چند برابر طول پاره‌خط **OA** است؟

۱) ۳

۲) ۳/۶

۳) ۳/۲

۴) ۴



$x=2$ مشترک

$y_M=4$

$f(x)=a(x+1)(x-5)$

$m=f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x^2-4x-5)+5a}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x^2-4x)}{x-2}=4a$

$f(2)=-5a \Rightarrow y+5a=4a(x-2) \to y=4ax-13a$

$\begin{cases} y=-5a \\ y=-13a \end{cases}$

$\frac{BA}{OA}=\frac{16a}{-5a}=3.2$

۱۰- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۲-\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ باشد، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

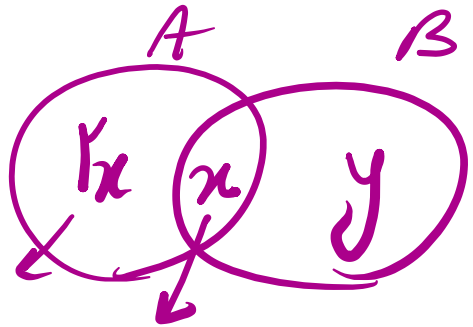
۴) صفر

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{x^۲}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۴-\sin^۴ x}}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۴-۴+\sin^۴ x}}{x^۲(۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{۲x^۲}=\frac{x^۲}{۲x^۲}=\frac{۱}{۴}$$

۱۱- اجتماع ورزشکاران در یک کلاس با ۲ رشته ورزشی ۳۶ نفر است. تعداد کسانی که فقط ورزش A را انجام می‌دهند دو برابر تعداد کسانی است که هر ۲ رشته ورزشی را انجام می‌دهند. اگر ۲۰ نفر ورزش B را انجام دهند، در این حالت، چند نفر فقط در یک رشته فعالیت دارند؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۰ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸



$n(A \cup B) = ۳۶$

$$\begin{cases} x + y = ۲۰ \\ ۳x + y = ۳۶ \end{cases}$$

$۲x = ۱۶$

$x = ۸$ — $y = ۱۲$

تعداد فقط A: $۲x$ — تعداد فقط B: y

$۲x + y = ۱۶ + ۱۲ = ۲۸$

۱۲- a_n یک الگوی خطی و $b_n = na_n$ است به طوری که $b_2 = a_6$ و $b_{10} = 240$ می‌باشد. مقدار $\sqrt{b_4 - a_4}$ چه عددی است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۲

$a_n = an + b \Rightarrow b_n = an^2 + bn$

$b_2 = a_6 \Rightarrow 4a + 2b = 6a + b \Rightarrow 2a = b$

$b_{10} = 240 \Rightarrow 100a + 10b = 240 \Rightarrow 120a = 240$

$a = 2$

$b = 4$

$b_n = 2n^2 + 4n$

$\sqrt{b_4 - a_4} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 4$

۱۳- دنباله a_n با تعریف $a_n = \left[\sqrt{n^2 - 2n + 8}\right]$ را در نظر می‌گیریم. جمع چهل جمله ابتدایی آن کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۷۸۵ ۲) ۷۸۱ ۳) ۷۷۴ ۴) ۷۸۳

$n^2 + 2n + 1 < n^2 - 2n + 8$

$\Rightarrow$ $n > 4$ $\xrightarrow{-2}$ $-2n < -8$ $\xrightarrow{+n^2}$ $n^2 - 2n < n^2 - 8$ $\Rightarrow n^2 - 2n + 8 < n^2$

$n^2 - 2n + 1 < n^2 - 2n + 8 < n^2 \longrightarrow n - 1 < \sqrt{n^2 - 2n + 8} < n \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 - 2n + 8}\right] = n - 1$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 4 + 5 + \cdots + 39$

$2 + 2 + 3 + 4 + \frac{37}{2}(4 + 39) = 785$

$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

۱۴- سه جمله اول یک دنباله هندسی را به ترتیب در اعداد ۴، ۸ و ۱۶ ضرب کرده‌ایم و یک دنباله حسابی به دست آمده است. جمع هشت جمله ابتدایی دنباله حسابی چند برابر جمع سه جمله اول آن است؟

۱) $\frac{۱۲۷}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۵۵}{۲۲۴}$ ۳) $\frac{۱۲۷}{۷}$ ۴) $\frac{۲۵۵}{۱۲۷}$

$a \quad ar \quad ar^2$

$4a, 18ar, 16ar^2$

$2(18ar) = 4a + 16ar^2 \Rightarrow 16ar = 4a + 16ar^2 \Rightarrow 4r = 1 + 4r^2$

$\Rightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0$

$\Rightarrow (2r-1)(2r-1) = 0$

$r = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_8}{S_3} = \frac{1-\frac{1}{256}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{255}{7 \times 32} = \frac{255}{224}$

۱۵- اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r را دو برابر کنیم، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهیم داشت. مقدار $r+2d$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_1, a_1 r, a_1 r^2 \longrightarrow 2a_1, 2a_1 r, 2a_1 r^2$

$2a_1 + 2a_1 r^2 = 2(2a_1 r)$

$\Rightarrow 1 + r^2 = 2r \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = 0 \Rightarrow r = 1$ (قابل قبول)

$r = 1 \longrightarrow d = 0$ (قابل قبول)

$\Rightarrow r + 2d = 1$

۱۶- بین دو عدد ۲- و ۱۰ حداقل چند واسطه حسابی درج کنیم تا جمع واسطه‌ها از ۶۰ بزرگ‌تر باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

n

$S = \frac{n+2}{2}(10-2) = (n+2)(4) > 60$

$\Rightarrow n+2 > 15 \Rightarrow n > 13$

۱۷- ریشهٔ پنجم عدد مثبت a، ۱۶ برابر عدد a با توان $\frac{۱۱}{۵}$ است. حاصل $\sqrt{۴a+۸}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$\sqrt[۵]{a} = ۱۶a^{\frac{۱۱}{۵}} \Rightarrow a = ۲^{۲۰}a^{۱۱} \Rightarrow a^{-۱۰} = ۲^{۲۰} \Rightarrow a^{۱۰} = ۲^{-۲۰}$

$\Rightarrow a = ۲^{-۲}$

$\sqrt{۱+۸-\sqrt{۹}} = ۳$

۱۸- اگر $A=۲-\sqrt{۳}$ ، $B=۲+\sqrt{۳}$ و $M=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{۱}{۱+B^۳}}$ باشد، مقدار $M+\frac{۱}{M}$ چه عددی است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

$AB=۱ \Rightarrow A^۳B^۳=۱$

$B^۳=\frac{۱}{A^۳}$

$M^۳=\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{۱}{۱+B^۳}=\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{A^۳}}$

$\Rightarrow M^۳=\frac{۱}{۱+A^۳}+\frac{A^۳}{۱+A^۳}=۱ \Rightarrow M=۱$

$M+\frac{۱}{M}=۲$

$(\sqrt{3}+1-1)^2 = 3$

$2\sqrt{3}+2-1-\sqrt{3} = \sqrt{3}+1$

۱۹- هرگاه $A = \frac{8+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-4}$ باشد، مقدار $(A-1)^2$ چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) $4-2\sqrt{3}$ ۳) ۳ ۴) $4+2\sqrt{3}$

$\frac{8+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{8\sqrt{3}-8+12-4\sqrt{3}}{3-1} = \frac{4\sqrt{3}+4}{2} = 2\sqrt{3}+2$

$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-4} \times \frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+4} = \frac{9+12\sqrt{3}+\sqrt{3}+4}{-13} = \frac{13+13\sqrt{3}}{-13} = -1-\sqrt{3}$

۲۰- اگر $A=2-\sqrt{3}$ ، $B=\sqrt[3]{16\sqrt[3]{4\sqrt{8}}}$ و $\sqrt{A}B^k=2-2\sqrt{3}$ باشد، مقدار k چه عددی است؟

۱) $\frac{31}{9}$

۲) $\frac{18}{31}$

۳) $\frac{9}{31}$

۴) $\frac{27}{31}$

$B=\sqrt[3]{16}\times\sqrt[9]{4}\times\sqrt[18]{8}=2^{\frac{4\times1}{3\times9}}\times2^{\frac{2\times5}{9\times6}}\times2^{\frac{3}{18}}=2^{\frac{31}{18}}$

$\sqrt{A}B^k=2-2\sqrt{3}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}AB^{2k}=4(1-\sqrt{3})^2=8(2-\sqrt{3})\Rightarrow B^{2k}=8-2^3$

$\Rightarrow B^2=2^{\frac{31}{9}}$

طرفین $B^{2k}=(2^{\frac{31}{9}})^k=2^3$

$\Rightarrow 2^{\frac{31k}{9}}=2^3\Rightarrow\frac{31k}{9}=2\Rightarrow k=\frac{27}{31}$