



۱- حد دو تابع $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x^b + \dots}{ax^r + \dots}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{ax^r} = r$$

$$\frac{1}{a} = r \rightarrow a = \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{13}{3} \quad (r) \quad \checkmark$$

$$\frac{19}{3} \quad (r)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = r$$

$$r \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \quad (r)$$



۲- فاصله بین خطوط مجانب افقی نمودار تابع $f(x) = 1 - \frac{4x+1}{|3x-2|}$ کدام است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty : 1 - \frac{4x+1}{3x-2} = 1 - \frac{4}{3} \\ x \rightarrow -\infty : 1 - \frac{4x+1}{-3x+2} = 1 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

$\frac{4}{3}$ (۱)
 $\frac{7}{3}$ (۲)

$y = \frac{4}{3}$ -----
 $y = -\frac{1}{3}$ -----

} $\frac{7}{3} - (-\frac{1}{3})$

$\frac{8}{3}$ ✓ (۴)



۳- به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 2x + 3}$ بجانب افقی خود را قطع نمی‌کند؟

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 2x + 3} = 1$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

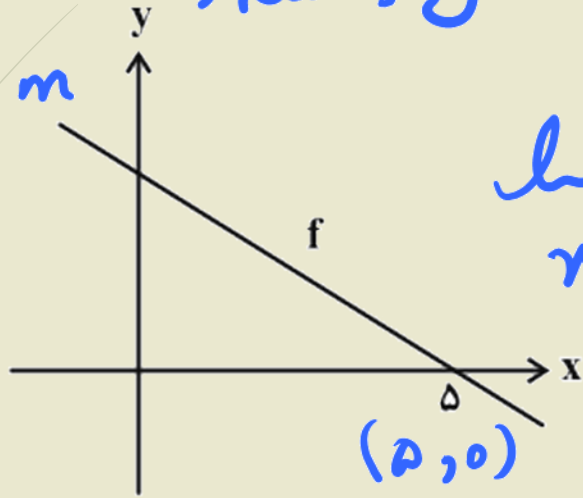
$$\cancel{x^2} + ax + 1 = \cancel{x^2} + 2x + 3$$

$$(a-2)x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{a-2} \Rightarrow \begin{aligned} a-2 &= 0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$



۴- شکل زیر نمودار تابع f است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ ، مقدار $f(1)$ کدام است؟

$$f_{\text{تangent}}: y - 0 = m(x - a) \rightarrow \boxed{y = mx - am}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx + am}{x} = m = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$
$$y(1) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$



۵- اگر $f(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + 2$ ، $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ باشد، طول نقطهٔ تلاقی نمودار تابع $g(x) = \frac{(a-1)x^2 + (a+2)x}{x^2 + 4a}$ با مجانب

افقی اش کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

مخرج

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + 2] = [2^+] = 2 = a$$

$x \rightarrow +\infty$

۱ (۲)

۲ (۱) ✓

$$g = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 8} = 1 \quad y = 1$$

۴) صفر

۳) -۱

$$\rightarrow x^2 + 2x = x^2 + 8$$

$$x = 2$$



۶- اگر مجانب افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{mx^2 - x + 1}{2x^2 - x + 1}$ بر نمودار تابع $g(x) = x^2 - 4x - m$ مماس باشد، حاصل ضرب صفرهای تابع f

کجای افقی $\frac{m}{2}$ →

کدام است؟

$$\Rightarrow x^2 - 4x - m = \frac{m}{2}$$

$$\xrightarrow{x^2} 2x^2 - 8x - 2m = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 4^2 - 4(-2m) = 0 \quad -\frac{8}{2} \quad (2)$$

$$16 + 4m = 0$$

$$m = -\frac{16}{4} = -\frac{4}{1}$$

$$-\frac{3}{8} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$-\frac{3}{5} \quad (3)$$

→ $f = 0 \rightarrow \frac{-\frac{4}{1}x^2 - x + 1}{2x^2 - x + 1} = 0 \rightarrow p = \frac{c}{a} = \frac{1}{-\frac{4}{1}} = -\frac{1}{4}$

مخرج



کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)^2 + (bx+1)^2}{(a+2)x^2 - 1}$

حاصل، باشد، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + b|x| + 2}{2x + 4} = 1$ اگر -7

$a = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)^2 + \overbrace{(-2x+1)^2}^{-(2x-1)^2}}{2x^2 - 1} = \frac{2 \cancel{2x}^2 + 2 \cancel{2x} + 1 + \cancel{2x}^2 - 2 \cancel{2x} + 1}{2x^2 - 1} = \frac{2 \cancel{2x}^2 + 2}{2x^2 - 1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-bx}{2x} = \frac{-b}{2} = 1 \quad -12 (1)$

$b = -2 \quad -24 (3)$

مورد ۲: $1x^3 + \overbrace{2x^2}^{12x^2} + 4x + 1 \quad 24 (4)$

$1x^3 + 12x^2 + 4x + 1 - (1x^3 - 12x^2 + 4x - 1) = 24x^2 + 2$



اگر $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 8x + 16}}{x^2 + |x^2 - 2|}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$(x-4)^2$ (1) صفر، $-\infty$ ✓

(2) صفر، $+\infty$

(3) $-\infty$ ، $\frac{3}{2}$ (4)

(3) $+\infty$ ، $-\infty$

$$f = \frac{2x + |x - 2|}{x^2 + |x^2 - 2|}$$

$x \rightarrow +\infty$ $\frac{2x - 2}{2x^2 - 2} = \frac{2x}{2x^2} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} = 0$

$-\infty$ $\frac{2x - (x - 2)}{x^2 - (x^2 - 2)} = \frac{x + 2}{2} = -\infty$





۹- اگر $f(x) = \left[\frac{2^x - 1}{5^x + 1} \right]$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$$f = \left[\frac{2^x}{5^x} \right] = \left[\left(\frac{2}{5} \right)^x \right] = 0$$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

-۲ (۲)

۲ (۱)

-۱ (۴)

۱ (۳)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2^x - 1}{5^x + 1} \right] = \left[\frac{-0,99}{1/0,1} \right] = \left[-0,99 \right] = -1$$

$x \rightarrow -\infty$

$$-1 = 0 + 1 = 1$$





۱۰- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x^3$ و $g(x) = \frac{1}{xf^{-1}(x)}$ باشد، نمودار تابع gof در همسایگی مجانب (های) افقی اش کدام است؟



$$g(f) = \frac{1}{f_x \underbrace{f^{-1}(f)}_x} = \frac{1}{x f} = \frac{1}{x(\sqrt{x^2+1} - x^3)} = \frac{1}{-x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

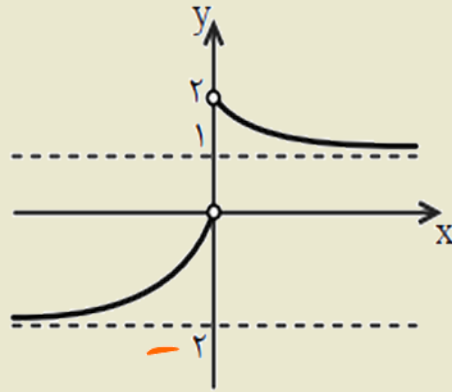
$x \rightarrow \pm \infty$

$$= -\frac{1}{+\infty} = 0^-$$

$y = 0$ (مجموعه x)



۱۱- اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟



۱

-۲

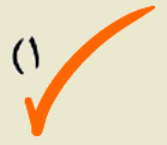
۵ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۴ (۴)

$$1 - 2(-2) = 5$$





۱۲- اگر توابع f و g وقتی x به $+\infty$ میل می کند، حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = A$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = B$ باشد، حاصل

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f = m \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g = p \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ کدام است؟ ($A \neq B \neq 0$)

$A - B$ (۲)

$A + B$ (۱)

$$\Rightarrow \begin{cases} m - p = A \xrightarrow{\text{منفی}} -m + p = -A \\ m + p = B \end{cases}$$

$\frac{B - A}{2}$ (۴) ✓

$\frac{A + B}{2}$ (۳)



$2p = B - A$

$p = \frac{B - A}{2}$

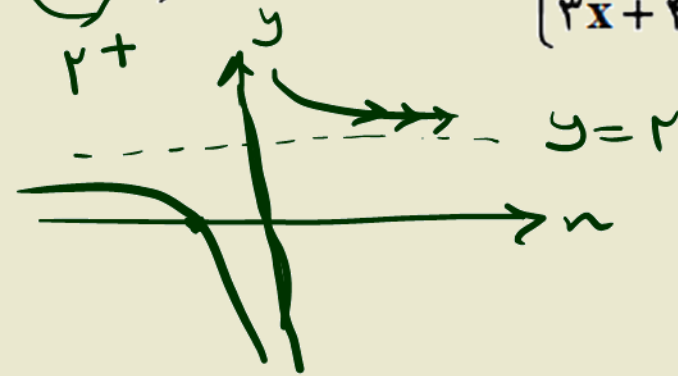


بیاد علی امینی
فانی

کدام است؟ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{n-1}{n}\right) - 2f\left(\frac{2n+3}{n}\right) \right)$ حاصل، $f(x) = \begin{cases} 1-x & ; x < 1 \\ 2x+3 & ; 1 \leq x < 2 \\ 3x+4 & ; x \geq 2 \end{cases}$



۲۰ (۲)



-۲۰ (۱)

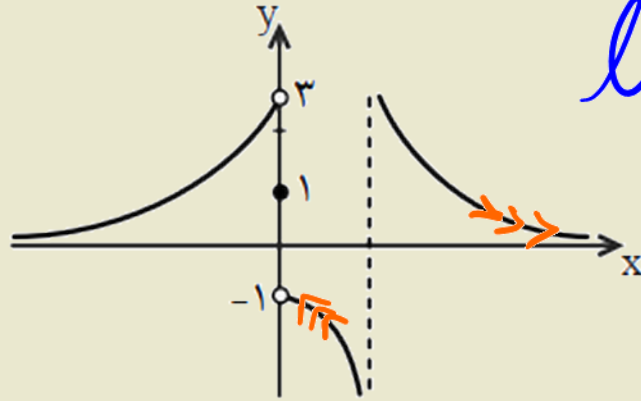
-۱۰ (۴)

۱۰ (۳)

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(1^-) - 2f(2^+) &= (1-1) - 2(10) \\ &= 0 - 20 \end{aligned}$$



۱۴- در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0^+) = -1$$

۱ (۱) ✓

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) صفر



۱۵- تابع $f(x) = \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} \stackrel{H}{=} \frac{12x^2 - 12x}{4x^2 + 14x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{24x - 12}{8x + 14} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{24}{8} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{4(\frac{1}{2})^3 - 6(\frac{1}{2})^2 + 1}{2(\frac{1}{2})^3 + 7(\frac{1}{2})^2 - 2} = \frac{1 - 1.5 + 1}{0.5 + 1.75 - 2} = \frac{0.5}{0.25} = 2$$

$x \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\frac{12x - 12}{4x + 14} \stackrel{x = \frac{1}{2}}{=} \frac{4 - 12}{2 + 14} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}}$$



فوق حرفت
بنیاد علمی آموزش

۱۶- فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-1 \quad (4)$$

$$\frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

۱ (۱) ✓



۱۷- اگر -1 ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[50]{(a^2 x^2)(a^4 x^4) \dots (a^{100} x^{100})}}{a^{49} x^k} = -1$ ، مقادیر a و k کدام اند؟

$k = 51, a = 1$ (۲ ✓)

$k = 51, a = -1$ (۱)

$k = 49, a = 1$ (۴)

$k = 49, a = -1$ (۳)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[50]{a^{2+4+\dots+100} \cdot x^{2+4+\dots+100}}}{a^{49} x^k}$$

$$2+4+\dots+100 = \frac{n}{2}(1+100) = \frac{100}{2}(1+100)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[50]{a^{50 \times 51} \cdot x^{50 \times 51}}}{a^{49} x^k} = \frac{|a^{51}| \cdot |x^{51}|}{a^{49} x^k} = \frac{-|a^{51}| x^{51}}{a^{49} x^k}$$

$$\frac{|a^{51}|}{a^{49}} = 1 \xrightarrow{a > 0} a^2 = 1 \rightarrow a = 1$$

$k = 51 \leftarrow$



۱۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + vx}{2x^2 + bx + c}$ فقط یک مجانب قائم $x=2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن کدام می‌تواند باشد؟

$$c=1, b=-1$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$y = -1 \quad (1)$$

$$\text{مخرج: } 2(x-2)^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow f = \frac{ax^2 + vx}{2x^2 - 4x + 4} \quad (3, 2) \rightarrow y = \frac{9a + 2v}{18 - 12 + 4} = \frac{9a + 2v}{2} \Rightarrow 9a + 2v = 12$$

$$y = \frac{3}{2} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{-x^2}{2x^2} = \frac{-1}{2}$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

$$\text{مخرج: } 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0 \Rightarrow f = \frac{ax^2 + vx}{2x^2 + bx} = \frac{ax + v}{2x + b}$$



۱۹- اگر $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

(۲) $(-1, 1)$

(۱) $(-1, 0)$

(۴) $(0, 1)$ ✓

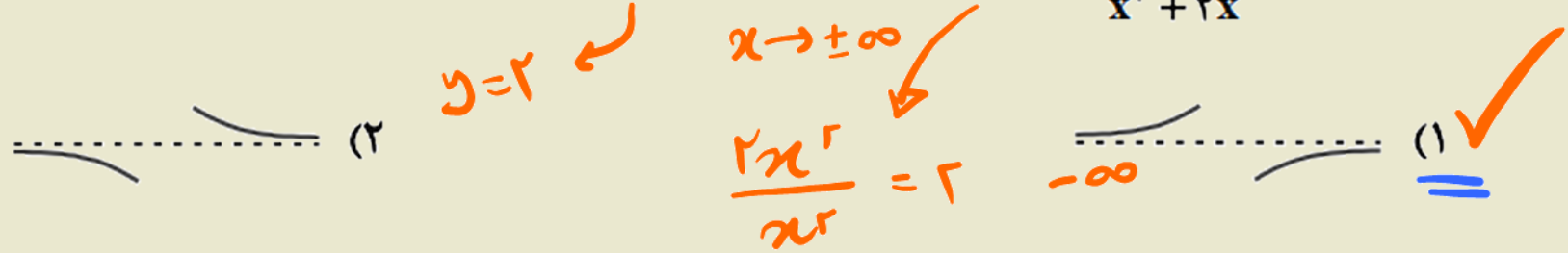
(۳) $(-2, 2)$

$$f(g) = \frac{\frac{2x-1}{x+2} + 3}{2 \frac{2x-1}{x+2} + 1} = \frac{x(x+2)}{x(x+2)} = \frac{2x-1 + 3x+6}{2x-2 + x+2} = \frac{5x+5}{3x} = \frac{5(x+1)}{3x}$$





۲۰- نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ نسبت به مجانب افقی خود، در بی نهایت کدام وضع را دارد؟



$x \rightarrow +\infty$
 $y > 2 \Rightarrow \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x} > 2$

$x(x^2 + 2x)$
 $2x^2 - x - 2 > 2x^2 + 4x$
 $-5x > 2$
 $x < -\frac{2}{5}$
 $x \in (-\infty, -\frac{2}{5})$

$x \rightarrow -\infty$
 $y > 2 \Rightarrow \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x} > 2$

$2x^2 - x - 2 > 2x^2 + 4x$
 $-5x > 2$
 $x < -\frac{2}{5}$
 $(-\infty, -\frac{2}{5})$