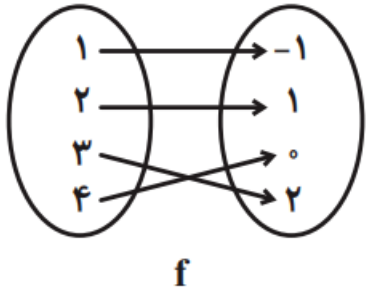
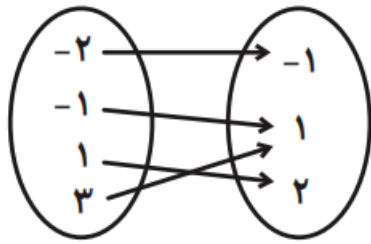


۱- با توجه به نمودارهای مقابل، برد تابع $g \circ f - \frac{f}{g}$ کدام است؟



f



g

$\{-\frac{3}{2}, 0\}$ (۲) ✓
 $\{0/1, \frac{3}{2}\}$ (۴)

$\{\frac{3}{2}, -1\}$ (۱)

$\{-\frac{3}{2}, 0/1\}$ (۳)

$f = \{(1, -1), (2, 1), (3, 0), (4, 2)\}$

$g = \{(-2, -1), (-1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$

$g \circ f = \{(1, -2), (3, 2)\} \Rightarrow \{(1, -\frac{3}{2}), (3, 0)\} \rightarrow \{-\frac{3}{2}, 0\}$

$f \circ g = \{(1, -\frac{1}{2}), (3, 2)\}$

۲- اگر داشته باشیم: $f = \{(-2, 0), (3, 2), (-1, m), (b, 3)\}$ و $g = \{(-3, c), (0, 2), (n, 2)\}$ و ضابطه $f + g$ به صورت $\{(-3, 2), (-1, 0)\}$

باشد، حاصل $m + n + b + c$ کدام است؟

$$f + g = \{(-3, 2), (-1, 0)\}$$

-۴ (۲)

-۶ (۴)

$$b = -3$$

$$n = -1$$

-۷ (۱)

-۵ (۳)

$$f(-3) + g(-3) = 2 + c = 2$$

$$c = -1$$

$$m + n + b + c$$

$$-2 + -1 + -3 + -1 = -7$$

$$f(-1) + g(-1) = m + 2 = 0$$

$$m = -2$$

۳- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1-3x}$ به صورت $(-\infty, a]$ است، اگر $g(x) = [-\frac{7}{3}x + 1]$ باشد، آنگاه حاصل $g(a)$ کدام است؟ ()، نماد جزء

صحیح است.

$$1-3x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 3x \Rightarrow \frac{1}{3} \geq x$$

(۲)

(۴)

(۱) صفر

(۳)

$$\Rightarrow \left(-\infty, \frac{1}{3} \right]$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \left[-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + 1\right] = \left[-\frac{7}{9} + 1\right] = \left[\frac{2}{9}\right] = 0 \quad \checkmark$$

۴- اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{5-x}$ باشد، در این صورت دامنه تعریف $(f+g)(x)$ کدام است؟

~~$[6, 27]$ (۲)~~

$[4, 25]$ (۱)

~~$[6, 25]$ (۴)~~

$[2, 27]$ (۳)

$$f(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$D_f = [2, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_{f+g} = [2, 5] \checkmark$$

$$g(x) = \sqrt{5-x} \Rightarrow 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$$

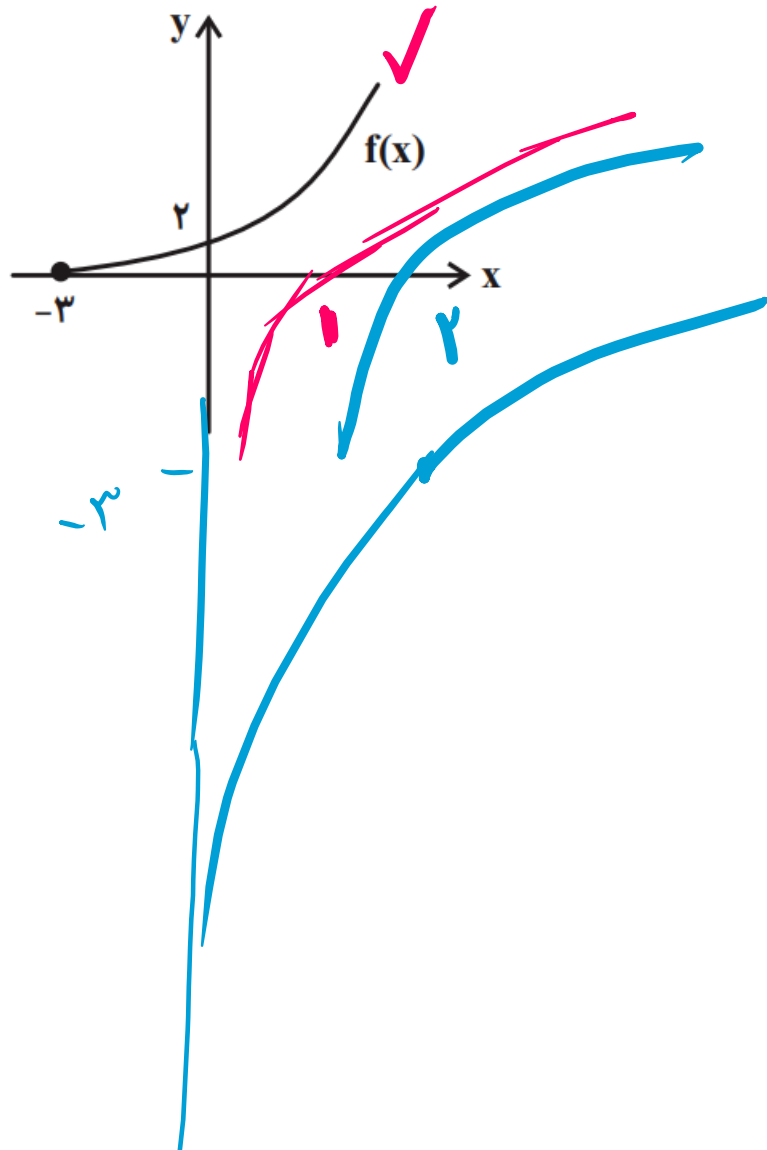
$$D_g = (-\infty, 5]$$

$$D_{(f+g) \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_{f+g} \} = \{ x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} \in [2, 5] \}$$

$$2 \leq \sqrt{x-2} \leq 5 \rightarrow 4 \leq x-2 \leq 25 \rightarrow 6 \leq x \leq 27$$

$$= \underline{[6, 27]}$$

۵- اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، نمودار تابع $y = -3 + f^{-1}(x)$ (نواحی) دستگام مختصات عبور نمی کند؟



(۱) فقط ناحیه دوم

(۲) فقط ناحیه سوم

(۳) ناحیه های سوم و چهارم

(۴) ناحیه های دوم و سوم

۶- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-2x^2 + \frac{b}{3}x - 3c}$ به صورت $D_f = \{\frac{1}{3}\}$ باشد، آنگاه $b+9c$ کدام است؟

$$f(x) = \sqrt{-2(x - \frac{1}{6})^2} = \sqrt{-2(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36})} = \sqrt{-2x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{18}}$$

$b = \frac{2}{3}$ $-3c = -\frac{1}{18}$
 $c = \frac{1}{54}$

$$b+9c = \frac{2}{3} + 9\left(\frac{1}{54}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

-Y دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - |x-1| - 2}}$ با دامنه تابع کدام گزینه، یکسان است؟

$y = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ (2) $-x \geq 0$

$y = \sqrt{-x^2}$ (1)

$-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0$

$y = \sqrt{-|x|}$ (3)

$y = \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x}}$ (4) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$
 $x > 0$

$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$
 $x > 0$



$D_f = |n| - |n-1| - 2 > 0$

$|n| - |n-1| - 2 > 0$
 \downarrow \downarrow
 $n=0$ $n=1$

$n < 0 \checkmark \Rightarrow -x + n - 1 - 2 > 0 \quad \times$

$0 \leq n \leq 1 \Rightarrow n + n - 1 - 2 > 0 \Rightarrow 2n > 3 \Rightarrow n > 1.5 \quad \times$

$D_f = \emptyset$

$n > 1 \checkmark \Rightarrow n - n + 1 - 2 > 0 \Rightarrow -1 > 0 \quad \times$

۸- دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+12x+a}$ برابر با $\mathbb{R} - \{b\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{x+1}{2(x-b)^2} = \frac{x+1}{2x^2 - 4bx + 2b^2}$$

$$2x^2 + 12x + a$$

۱۴ (۱)

۱۶ (۳)

① $-4b = 12$
 $b = -3$

② $2b^2 = a$
 $18 = a$

$$\Rightarrow a+b = 18 - 3 = 15$$

۹- کدام دسته از توابع زیر مساوی هستند؟

$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} = D_g \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$g(x) = \frac{|x| + 2}{|x| - 1}$ و $f(x) = \frac{x^2 + 3|x| + 2}{x^2 - 1}$ (الف)

$g(-1) = \frac{4}{2} = 2$ $f(-1) = \frac{2}{2} = 1$

$x^2 - 1 = 0$ $|x| - 1 = 0$
 $x^2 = 1$ $|x| = 1$
 $x = \pm 1$ $x = \pm 1$

برابرند

~~$g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3}$ و $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ (ب)~~

$f(-2) = 4$ $g(-2) = -4$

$D = \mathbb{R}$ $D = \mathbb{R}$

~~$g(x) = \sqrt{x^3 - x}$ و $f(x) = |x| \sqrt{x-1}$ (ج)~~

$n(n-1) > 0$

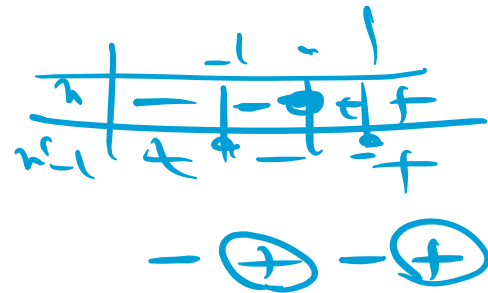
$n = 0$
 $n = \pm 1$

فقط دسته (الف)

(۲) دسته (الف) و (ج)

(۴) دسته (ب) و (ج)

(۳) فقط دسته (ج)



۱۰- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-|x|}}$ مفروض باشند، دامنه تابع $\frac{f^2}{-g}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

$$D_f: \begin{cases} x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow [0, +\infty) - \{1\}$$

(۱) صفر
۲ (۳)

$$D_g: \frac{x^2}{1-|x|} \geq 0 \Rightarrow 1-|x| > 0 \Rightarrow |x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

حبر در ضمیمه

$$\Rightarrow D_g = (-1, 1)$$

$$\frac{f^2}{-g} = D_f \cap D_g^{-1} - \{g(x)=0\} = (-1, 1) - \{0\} = \underline{(-1, 1)} \checkmark$$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

۱۱- اگر $f = \{(1, 3), (2, 2), (3, 0), (4, 1), (-2, -2)\}$ و $g(x) = \frac{x^2}{x+4}$ با دامنه $D_g = (-4, 0)$ باشد، مقدار α کدام باشد تا رابطه

$$f^{-1}(\alpha^2 + 3\alpha) = g^{-1}(2) = \beta$$

$$f^{-1}(\alpha^2 + 3\alpha) = g^{-1}(2) \text{ برقرار باشد؟}$$

۲ (۲)

۱ (۱)

$$g(\beta) = 2 \Rightarrow \frac{\beta^2}{\beta+4} = 2 \Rightarrow \beta^2 - 2\beta - 8 = 0 \Rightarrow (\beta + 2)(\beta - 4) = 0$$

$\beta = -2$ ✓

$\beta = 4$ ✗✗

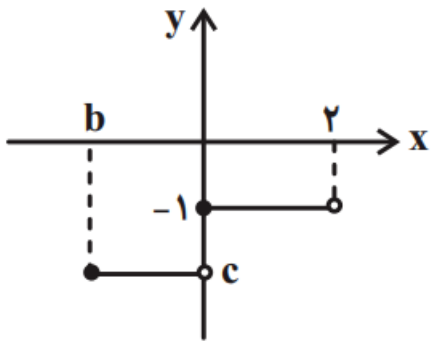
$\beta = -2$

$\beta = -2$

$$f(\beta) = \alpha^2 + 3\alpha \Rightarrow f(-2) = \alpha^2 + 3\alpha = -2 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$$

در نتیجه داریم
 $\alpha = -1$
 $\alpha = -2$

۱۲- اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{x-a}{a} \right]$ مطابق شکل زیر باشد، نسبت $\frac{ab}{c}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



$$f(x) = \left[\frac{x}{a} - 1 \right] = \left[\frac{x}{a} \right] - 1$$

$$0 \leq \frac{x}{a} < 1 \xrightarrow{a > 0} f(x) = 0 - 1 = -1$$

$a \leq x < a$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (4)$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow a = r \Rightarrow f(x) = \left[\frac{x}{r} \right] - 1$$

$$-1 \leq \frac{x}{r} < 0 \rightarrow$$

$$f(x) = -1 - 1 = -2$$

$$-2 \leq x < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{-2}{-2} = 1$$

۱۳- اگر $f(x) = \frac{x-a}{x+2}$ ، $g(x) = \sqrt{3x+7}$ و $(3f-3g)(3) = 6$ باشد، مقدار a کدام است؟

-۳۰ (۲)

-۲۶ (۴)

-۲۷ (۱)

-۲۸ (۳)

$$3f(3) - 3g(3) = 6$$

$$3\left(\frac{3-a}{5}\right) - 3(\sqrt{a+7}) = 6$$

$$3\left(\frac{3-a}{5}\right) = 6 + 3 \Rightarrow \frac{3-a}{5} = 4 \Rightarrow 3-a = 20$$

$a = -17$

تعريف ۱-۱

$$y_1 = y_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

۱۴- اگر f تابعی یک به یک و $f(7x+4) = f(x+2f(x))$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱) صفر

۸ (۴)

۴ (۳)

$$\Rightarrow f(7x+4) = f(x+2f(x)) \Rightarrow 7x+4 = x+2f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{4x+4}{2} \Rightarrow f(x) = 2x+2$$

$$\Rightarrow f(2) = 6$$

۱۵- برای تابع یک به یک f داریم: $f(0) = 2$ و $f(-1) = 1$. اگر نمودار تابع $y = (f \circ g)(x)$ به شکل زیر باشد، عرض از مبدأ نمودار تابع خطی

$y = g^{-1}(x)$ کدام است؟

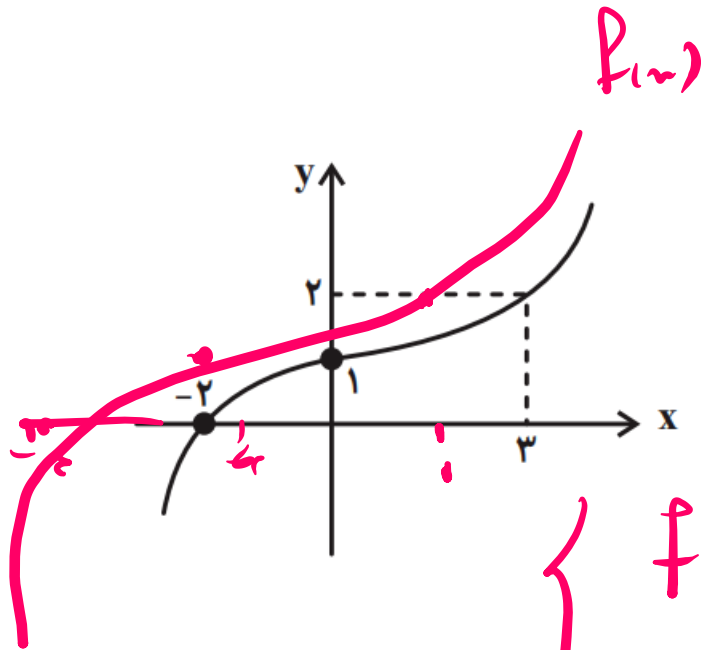
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

$$y = (f \circ g)(x)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} f(g(3)) = 2 \Rightarrow g(3) = 0 \Rightarrow A \end{array} \right. \Big| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}$$

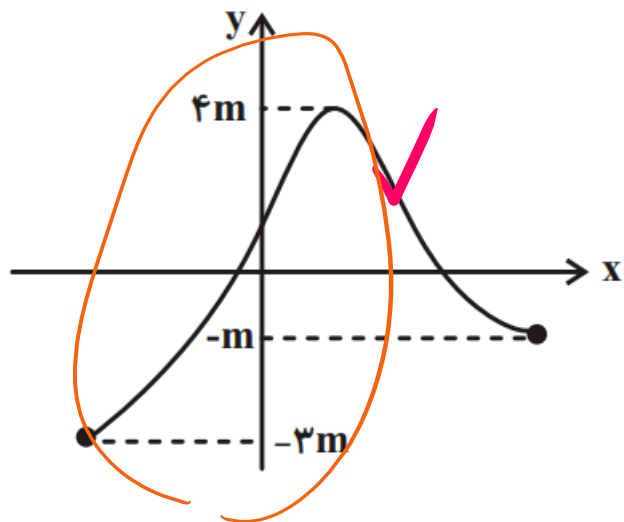
$$\left\{ \begin{array}{l} f(g(-2)) = 1 \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow g(-2) = -1 \Rightarrow B \end{array} \right. \Big| \begin{array}{l} -2 \\ -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A^{-1} \Big| \begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array} \\ B^{-1} \Big| \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array} \end{array} \Rightarrow m_{g^{-1}} = \frac{-2 - 0}{-1 - 2} = 2$$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 1 \xrightarrow{x=0} y = 1 \quad \checkmark$$

۱۶- اگر $f(x)$ تابع خطی و $(f \circ f)(x) = (m-1)x^2 + x + 4$ بوده و نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟



$$\begin{aligned}
 f(m) &= an + b \\
 f \circ f(m) &= f(f(m)) = f(an + b) \\
 &= a(an + b) + b \\
 &= a^2n + ba + b
 \end{aligned}$$

$$[-2, 6] \quad (1)$$

$$[-3, 4] \quad (2)$$

$$[-1, 6] \quad (3)$$

$$[-1, 5] \quad (4)$$

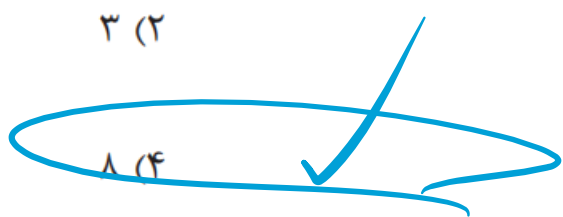
$$\Rightarrow (m-1)x^2 + x + 4 = a^2x + ba + b$$

$$\begin{aligned}
 m-1 &= 0 \\
 \underline{m} &= 1
 \end{aligned}$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \begin{cases} b=4 \\ \times \end{cases}$$

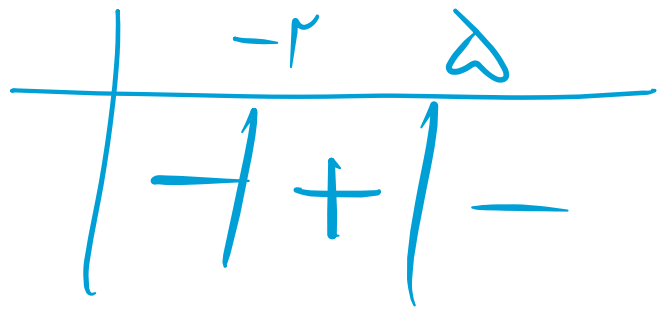
$$\begin{aligned}
 f(m) &= x + 4 \\
 \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \rightarrow f(-3) = -1 \\ x = 4 \rightarrow f(4) = 4 \end{array} \right. &\Rightarrow R_{f \circ g} = [-1, 4]
 \end{aligned}$$

۱۷- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(5 - [x])(2 + [x])}$ به صورت $[a, b)$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.



$$(5 - [x])(2 + [x]) \geq 0$$

\swarrow \swarrow
 $[x] = 5$ $[x] = -2$



$$-2 \leq [x] \leq 5 \rightarrow -2 \leq x < 4 \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1$$

۱۸- معادله $x^2 - 5x = 3x([x] + [-x])$ چند جواب دارد؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

$$x + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۱ (۲)

(۱) صفر

۳ (۴)

۲ (۳)

$x \in \mathbb{Z}$

$$x^2 - 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \checkmark \\ x=8 \quad \checkmark \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z}$$

$x \notin \mathbb{Z}$

$$x^2 - 8x = -3x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \quad \times \\ x=5 \quad \times \end{cases}$$

۱۹- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ باشد، دامنه تابع $y = f(x)$ شامل چند عدد صحیح نمی باشد؟

$$f(x-n) = \sqrt{x^2 - 9}$$

۴ (۲)

۱ (۴)

۵ (۱)

۳ (۳)

$$x-n=t$$

$$\Rightarrow x-t=n$$

$$f(t) = \sqrt{(x-t)^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 2xt + t^2 - 9} = \sqrt{t^2 - 2t + 1 - 9} = \sqrt{t^2 - 2t - 8} \geq 0$$

$$(t+1)(t-8) = 0 \quad \begin{cases} t=8 \\ t=-1 \end{cases} \quad \frac{-1 \quad 8}{(t+1)(t-8)}$$

$$(-1, 8) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(a, b) \in g \Rightarrow (b, a) \in g^{-1}$$

۲۰- اگر داشته باشیم $g^{-1}(x) = ax^3 + bx$ و $g(x) = r f\left(\frac{x}{r}\right)$ ، $f^{-1}(x) = \lambda x^3 + \mu x$ ، آنگاه $a + b$ کدام است؟

$$g(u) = r f\left(\frac{u}{r}\right) = y$$

$$u = g^{-1}(y)$$

$$f\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{y}{r} \Rightarrow \frac{u}{r} = f^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) \Rightarrow u = r f^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$g^{-1}(y) = r f^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$g^{-1}(u) = r f^{-1}\left(\frac{u}{r}\right) \Rightarrow r \left(\lambda \left(\frac{u}{r}\right)^3 + \mu \left(\frac{u}{r}\right) \right) = \underbrace{r}_{a} u^3 + \underbrace{\mu}_{b} u$$

$$9 \quad (2)$$

$$18 \quad (4)$$

$$1 \quad (1)$$

$$6 \quad (3)$$