



وقت پیشنهادی: ۴۰ دقیقه

تابع + مثلثات + حد بی نهایت و حد در بی نهایت
ریاضی ۳: صفحه‌های ۱ تا ۵۷ / ریاضی ۱: صفحه‌های ۲۸ تا ۴۶ / ریاضی ۲: صفحه‌های ۷۱ تا ۹۴ و ۱۱۹ تا ۱۳۶

0, 1, 2, 3, ..., 6

۱۴۱- در بازه نزولی تابع $f(x) = 3|x-2| + x|x-2|$ چند مقدار متمایز برای $|f(x)|$ وجود دارد؟

$$F(n) = |n-2|(n+3)$$

$$n \leq \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$n = 2$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$$

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴) ✓

$$0 \leq F(n) \leq \frac{25}{4} = 6.25$$

۱۴۲- در شکل زیر، اگر تابع f از روی تابع g ساخته شده باشد، ضابطه تابع f کدام است؟

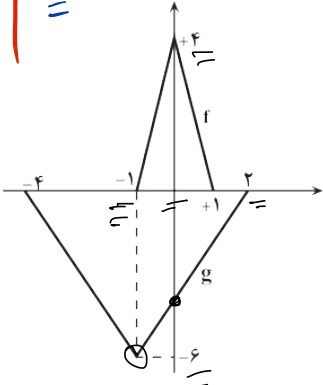
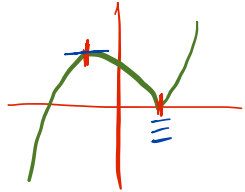
$$F(1) = 0$$

$$\propto \frac{2}{3}g(-\frac{1}{3}(x-1))$$

$$\frac{2}{3}g(-\frac{1}{3}x-1)$$

$$F(n) = -\frac{2}{3}g(3(x-1))$$

$$-\frac{2}{3}g(3x-1)$$



۱۴۳- اگر ضابطه تابع وارون $f(x) = \log_3(\sqrt{x^2+1}-x)$ به صورت $f^{-1}(x) = a(3^x + \frac{b}{3^x})$ باشد، آنگاه $a^2 + b^2$ کدام است؟

$$F(0) = 0 \rightarrow F^{-1}(0) = 0$$

$$F(\frac{4}{3}) = 1 \rightarrow F^{-1}(1) = -\frac{4}{3}$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{x^2+1}-x=3$$

$$x^2+1 = x^2+6x+9$$
$$\rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

$$\rightarrow 0 = a(1+b) \rightarrow b = -1$$

$$\rightarrow -\frac{4}{3} = a(3 + \frac{b}{3}) \rightarrow a(3 + \frac{-1}{3}) = -\frac{4}{3} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۵ (۳) ✓

۴ (۴)

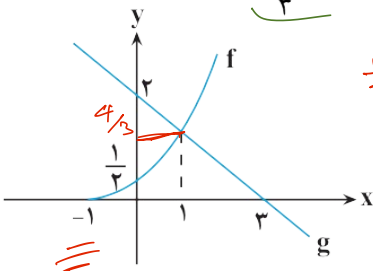
۹ (۳)

۴ (۴)

۳ (۴)

۲ (۴)

۱۴۴- با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، مقدار تابع $h(x) = \frac{g \circ f^{-1}(x)}{f \circ f^{-1}(x-5)}$ در نقطه‌ای به طول $\frac{4}{3}$ کدام است؟



$$F(1) = \frac{4}{3} \rightarrow F^{-1}(\frac{4}{3}) = 1$$

$$h(\frac{4}{3}) = \frac{g(1)}{f \circ f^{-1}(-1)} = \frac{\frac{4}{3}}{f(0)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$$

صفر (۱)

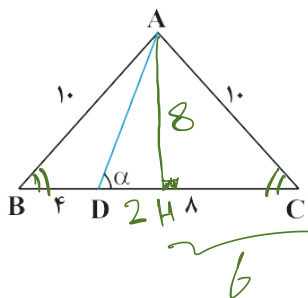
۸ (۲) ✓

۴ (۳)

۴ (۴)

۲ (۴)

۱۴۵- با توجه به شکل مقابل، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟



$$\cot \alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۱ (۱) ✓

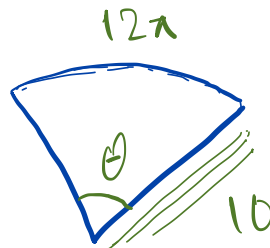
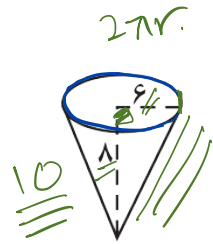
۴ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

۳ (۴)

۴ (۴)



۱۴۶- اگر مخروط شکل زیر را گسترده نماییم، زاویه قطاع حاصل کدام است؟

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

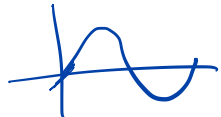
$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5}$$

(۱) $\frac{5}{6}\pi$

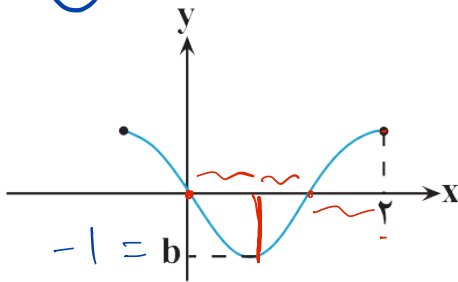
(۲) $\frac{5}{4}\pi$

(۳) $\frac{4}{5}\pi$

(۴) $\frac{6}{5}\pi$



۱۴۷- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \cos(ax + \frac{1}{4})\pi$ می‌باشد. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟



$$f(x) = -\sin(ax)$$

$$\frac{3T}{4} = 2 \rightarrow T = \frac{8}{3} = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$\rightarrow |a| = \frac{3}{4} \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

(۱) $-\frac{3}{2}$

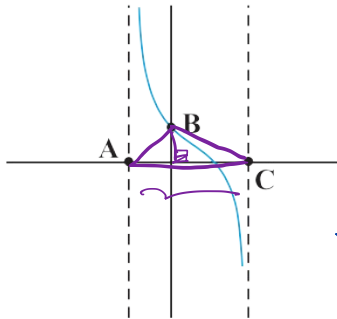
(۲) $\frac{4}{3}$

(۳) $-\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$



۱۴۸- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $y = \tan(-2x + \frac{\pi}{4})$ می‌باشد. در این صورت مساحت مثلث ABC کدام است؟



$$S = \frac{1}{2} \times AC \times y_B = \frac{AC}{2}$$

$$y_B = y(0) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$$

$$T_y = \frac{\pi}{1-2} = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

(۱) $\frac{\pi}{8}$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $\frac{3\pi}{8}$

(۴) $\frac{\pi}{2}$



۱۴۹- نمودار تابع $f(x) = 25\cos(2x) - 4$ خط $y = 3$ را در بازه $(0, 1)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ قطع می‌کند. $\tan a$ کدام است؟

$$25\cos(2a) - 4 = 3 \rightarrow \cos(2a) = \frac{7}{25} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\rightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{7}{25} \rightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{7}{25} \rightarrow 1-t^2 = \frac{7}{25}(1+t^2) \rightarrow t^2 = \frac{9}{16}$$

$$\rightarrow \tan a = \pm \frac{3}{4} \rightarrow \tan a = +\frac{3}{4}$$

(۱) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{5}{3}$

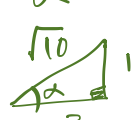
(۴) $\frac{2}{3}$



۱۵۰- اگر α و β کوچک‌ترین جواب مثبت معادلات $10\sin x = 8$ و $10\sin x = \sqrt{10}$ باشند، حاصل $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

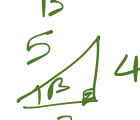
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5}$$



$$\tan \beta = \frac{4}{3}$$

(۱) ۲

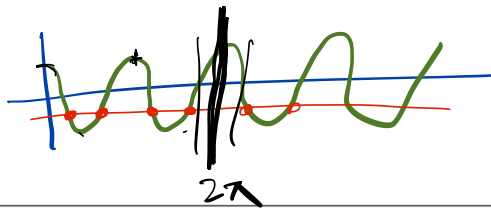
(۲) -۲

(۳) ۳

(۴) -۳



$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3+12}{9-4} = \frac{15}{5} = 3$$



۱۵۱- جوابهای معادله $\cos^2 x = \cos^2 2x + 2 \cos 2mx + 2 \cos^2 mx$ روی دایره مثلثاتی تشکیل یک چهارضلعی می دهد. m کدام است؟

$$\cos 2m\pi = \frac{-1}{3} \quad | \quad 2T = 2\pi$$

$$T = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{12m} = \pi$$

$$\rightarrow m = \pm 1$$

- ۱ (۱) ✓
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۱۵۲- از معادله $\sin^3 x + \cos^2 x = 0$ اختلاف بیشترین و کمترین جواب در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$\sin 3x = -\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right)$$

$$\rightarrow 3x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi \\ 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} - 2\pi \end{cases} \rightarrow \pi = \begin{cases} 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} \\ (4k-1)\frac{\pi}{10} \rightarrow \frac{3\pi}{10}, \frac{17\pi}{10} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{16\pi}{10} = \frac{8\pi}{5}$$

- ۷π (۱)
- ۵
- ۸π (۲) ✓
- ۵
- ۹π (۳)
- ۵
- ۶π (۴)
- ۵

۱۵۳- نمودارهای دو تابع $f(x) = \tan^2 x \cdot \tan^2 x + 1$ و $g(x) = \sqrt{2} \tan x (1 + \cos^2 x) - 1$ در چند نقطه مشترک، محور xها را

در بازه $[0, \pi]$ قطع می کنند؟

$$y(x) = 0 \quad | \quad f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{2} \frac{\sin \pi}{\cos \pi} (2 \cos^2 \pi) - 1 = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{2} \sin 2\pi = 1 \rightarrow \sin 2\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\pi = \begin{cases} 2k\pi + \pi/4 \\ 2k\pi + 3\pi/4 \end{cases} \rightarrow \pi = \begin{cases} k\pi + \pi/8 \\ k\pi + 3\pi/8 \end{cases} \rightarrow \pi = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$$

- ۱ (۱) صفر
- ۱ (۲)
- ۲ (۳) ✓
- ۳ (۴)

۱۵۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2x}{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

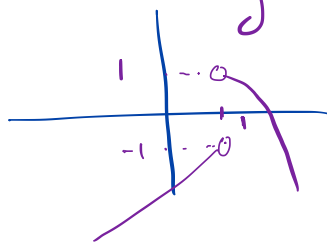
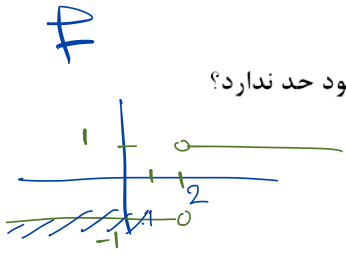
- √۲ (۱)
- ۳
- √۲ (۲)
- ۳
- ۲√۲ (۳) ✓
- ۳
- ۲√۲ (۴)
- ۳

۱۵۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 7x - 6}{\sqrt{x+1} - 2}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HoP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7}{2\sqrt{x+1}} = \frac{27 - 7}{2\sqrt{4}} = \frac{20}{4} = 5$$

- صفر (۱)
- ۸۰ (۲) ✓
- ۲۰ (۳)
- ۴ (۴)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f \circ g(x) = \begin{cases} 1^+ & f(1) = -1 \\ 1^- & f(-1) = -1 \end{cases} \quad g < 1$$



۱۵۶- اگر $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2+2 & x > 1 \\ 2x-3 & x < 1 \end{cases}$ باشد، تابع $y = f(g(x))$ در چند نقطه از دامنه خود حد ندارد؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

در همه نقاط حد دارد. ✓

$$\frac{9}{16}a - \frac{3}{2} - 3 = 0$$

$$\rightarrow 9a - 24 - 48 = 0$$

$$a = 8$$

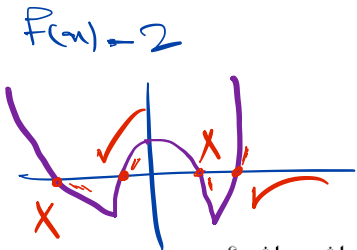
۱۵۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = b$ و $f(x) = \frac{|ax^2 - 2x - 3|}{|4x^2 - 11x + 6|}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{(4a-3)(2a+1)}{(4a-3)(a-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \frac{\frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2} - 2} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5 = b$$

- ۶ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۶ (۳)
- ۱۰ (۴)

۱۵۸- اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ باشد، به ازای چند مقدار a حاصل $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-1}{f(x)-2}$ برابر $+\infty$ است؟



$$\frac{0^+}{0^+} = +\infty$$



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۱۵۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a)} = +\infty$ باشد، آنگاه $a+b$ چند مقدار متفاوت می تواند داشته باشد؟

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} \rightarrow a+b=0$$

$$\begin{cases} 2a+b = -4 \\ 2b+a = -4 \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{-8}{3}$$

۱۶۰- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{b+3}{\pi a \sin x - b} = +\infty$ ، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

$$\frac{0}{0} = +\infty \rightarrow \begin{cases} b > -3 \rightarrow a-b = a-0 = 0^+ \\ a > -3 \rightarrow a = -1, -2 \\ b < -3 \rightarrow a-b = a-0 = 0^- \end{cases}$$

$$\rightarrow a-b=0$$

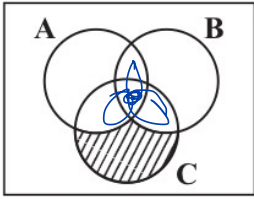
$$a=b$$

$$\rightarrow a^- - a = 0^-$$

$$a > 0$$

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۱۶۱- اگر $A = [-1, +\infty)$ و $B = (3, 11)$ و $C = (-10, 7]$ باشند، مجموعه هاشور خورده در نمایش هندسی زیر، کدام یک از



$C - A$

بازدهای زیر است؟

- (۱) $(-10, -1)$ ✓
- (۲) $(-10, -1]$
- (۳) $(-10, 3]$
- (۴) $(-10, 3]$

۱۶۲- در یک کلاس ۵۰ نفره، برای آمارگیری در مورد ورزش مورد علاقه دانش آموزان، نتیجه نهایی به صورت جدول زیر ارائه شد. اگر

۵ نفر به هیچ ورزشی علاقه‌مند نباشند، چند نفر فقط به یک ورزش علاقه‌مندند؟

فوتبال	والیبال	بسکتبال	فوتبال و والیبال	فوتبال و بسکتبال	والیبال و بسکتبال
۳۰	۲۵	۲۵	۱۵	۲۰	۱۰

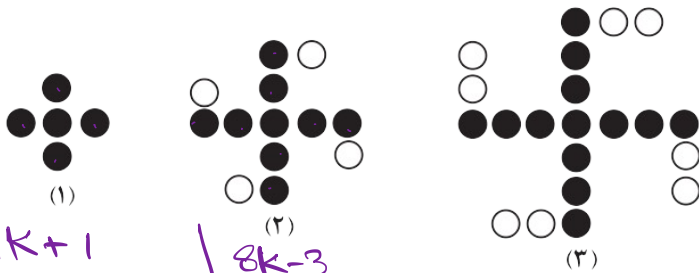
- (۱) ۱۵
- (۲) ۲۰ ✓
- (۳) ۱۰
- (۴) ۲۵

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$45 = 30 + 25 + 25 - 15 - 20 - 10 + n \rightarrow n = 10$

$45 - 15 - 20 - 10 + 2(10) = 65 - 45 = 20$

۱۶۳- در الگوی روبه‌رو، مجموع کل مهره‌ها و مهره‌های رنگی در شکل شماره یازدهم کدام است؟



سیاه = $4k + 1$

سفید = $4(k-1)$

$8k - 3$

$16k - 6 - (4k - 4)$

$= 12k - 2$

$k = 11 \rightarrow 132 - 2 = 130$

- (۱) ۱۲۸
- (۲) ۱۳۰ ✓
- (۳) ۱۳۲
- (۴) ۱۳۴

۱۶۴- جمله سیزدهم دنباله حسابی $\dots, \frac{-5}{2}, \frac{-13}{4}, -4$ چقدر از واسطه حسابی جملات بیست و یکم و چهل و نهم، کمتر است؟

$\frac{a_{21} + a_{49}}{2} - a_{13} = \frac{2a_{35}}{2} - a_{13} = a_{35} - a_{13} = 22d$

$4 - \frac{13}{4} = d = \frac{3}{4} \rightarrow 22 \times \frac{3}{4} = \frac{33}{2} = 16.5$

- (۱) ۱۵/۵
- (۲) ۱۶
- (۳) ۱۶/۵ ✓
- (۴) ۱۷

۱۶۵- در یک دنباله هندسی غیر ثابت با جملات مثبت، اگر جمله دهم مجذور جمله سوم باشد، جمله چندم دنباله مکعب جمله اول

$a_{10} = a_3^2 \rightarrow 4^7 = a_3 = a_4^2 \rightarrow a = 4^5$

$a_n = a^3 \rightarrow 4^{n-1} = a^2 = 4^{10} \rightarrow n-1 = 10$

$n = 11$

است؟

- (۱) نهم
- (۲) دهم
- (۳) یازدهم ✓
- (۴) دوازدهم

۱۶۶- ۱۲۲ قرص نان را بین ۴ نفر چنان تقسیم می‌کنیم که سهم‌های دریافتی تشکیل یک دنباله حسابی بدهند و مجموع سه سهم کوچکتر

یک واحد کمتر از دو برابر سهم بزرگ‌تر باشد. کوچک‌ترین سهم؛ چند قرص نان بوده است؟

$a, a+d, a+2d, a+3d$

$4a + 6d = 122 \rightarrow 2a + 3d = 61 \rightarrow 3a + 1 = 60$

$3a + 3d = 2a + 6d - 1$

$\rightarrow a = 20$

$\rightarrow a + 1 = 3d$

- (۱) ۷
- (۲) ۱۵
- (۳) ۴۱
- (۴) ۲۰ ✓

$a \rightarrow$ حسابی
 $b \rightarrow$ هندسی

۱۶۷- در یک دنباله حسابی، $\frac{d}{a_1} = \frac{2}{3} \rightarrow a_1 = 1.5d$ است. اگر جملات هفتم و دوازدهم این دنباله به ترتیب جملات دوم و سوم یک دنباله هندسی باشند، جمله اول دنباله هندسی، جمله چندم دنباله حسابی است؟ (جمله اول و d قدر نسبت دنباله است.)

$a_7 = b_2$

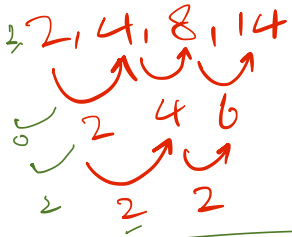
$a_{12} = b_3$

$\rightarrow q = \frac{12.5d}{7.5d} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

$\rightarrow 7.5d = b_1 \cdot \frac{5}{3} \rightarrow \underline{b_1 = 4.5d = 1.5d + 3d = a_1 + 3d = a_4}$

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

۱۶۸- اعداد طبیعی زوج را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شماره آن دسته باشد، مانند:



$n^2 - n + 2$

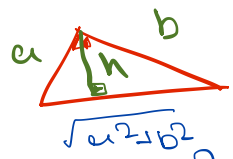
$\xrightarrow{n=20} 20 \times 19 + 2 = 382$

مجموع جملات دسته بیستم کدام است؟

- ۸۰۰۰ (۱)
- ۸۰۱۰ (۲)
- ۸۰۲۰ (۳)
- ۸۰۳۰ (۴)

$S = \frac{20}{2} (2 \times 382 + 19 \times 2) = 20 (382 + 19) = 8020$

۱۶۹- در مثلث قائم الزاویه ای اگر اضلاع قائمه و ارتفاع وارد بر وتر سه جمله متوالی دنباله هندسی صعودی باشند، آنگاه مربع قدر نسبت کدام است؟



h, a, b

$\rightarrow a^2 = bh \rightarrow h = \frac{a^2}{b}$

$h \sqrt{a^2 + b^2} = ba$

$\rightarrow \frac{a^2}{b} \sqrt{a^2 + b^2} = ab$

$\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a}$

$\rightarrow a^2 + b^2 = \frac{b^4}{a^2}$

$\rightarrow b^4 - b^2 a^2 - a^4 = 0$

$\rightarrow (\frac{b}{a})^4 - (\frac{b}{a})^2 - 1 = 0$

$\frac{b}{a} = q \rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$

$\rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ (۱)
- $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲)
- $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (۳)
- $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (۴)

۱۷۰- در جدول زیر اعداد واقع در هر سطر دنباله حسابی و اعداد واقع در هر ستون دنباله هندسی تشکیل می دهند. مجموع مقادیر

a	۸	b
c	d	۶
۲۷	e	f

a	8	b
aq	8r	bs
aq ²	8r ²	bs ²

$bs = 6 \Rightarrow b^4 = 6$

$aq^2 = 27 \quad aq^2 = 27$

ممکن برای $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$q = \frac{6}{b}$

$a \frac{36}{b^2} = 27 \rightarrow \frac{a}{b^2} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4} b$

$a = \frac{3}{4} b^2, a + b = 16 \rightarrow 3b^2 + 4b - 64 = 0$

$b = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{3} = \frac{-2 \pm 14}{3} < \frac{12}{3} \rightarrow b = 4$

$a + b = 16$
 $aq + bs = 16r$
 $aq^2 + bs^2 = 16r^2$

$\rightarrow a^2 q^2 + b^2 s^2 + 2abqs = a^2 q^2 + b^2 s^2 + abs^2 + abq^2$

$\rightarrow 2qs = s^2 + q^2 \rightarrow (s - q)^2 = 0 \rightarrow s = q$

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- صفر (۳)
- $\frac{3}{2}$ (۴)