

۳۱- اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد صحیح باشند به طوری که  $a|b$  و  $b|c$ ، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر لزوماً درست نیست؟

$$\underline{a|c}$$

$$\begin{array}{c} a|b \\ \hline b|c \\ a|c \end{array}$$

$ab|c^2$  (۲)

$a^2|b^2+c^2$  (۴)

$$a|b \rightarrow a^2|b^2$$

$$a|c \rightarrow a^2|c^2$$

$$a|b$$

$$a|c$$

$$a^2|bc$$

$$a^2|b^2+c^2$$

$a^2|bc$  (۱)

$2a|b+c$  (۳)

۳۲- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، در اثبات نامساوی  $(a+b+1)ab \geq a^2 + b^2 + a^2b^2$  به روش بازگشتی، کدام رابطه همواره

$$\underbrace{2a^2} + \underbrace{2b^2} + \underbrace{2a^2b^2} - \underbrace{2a^2b} - \underbrace{2ab^2} - \underbrace{2ab} \geq 0$$

درست حاصل می شود؟

$$(a-b)^2 + (ab-a)^2 + (ab-b)^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 + (ab-a)^2 + (ab+b)^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 + (ab-1)^2 \geq 0 \quad (۲)$$

$$(a+b-ab)^2 \geq 0 \quad (۱)$$

$$(a+b-1)^2 + (ab-1)^2 \geq 0 \quad (۳)$$

۳۳- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی و  $(a, 6) = 3$  و  $(b, 6) = 2$  باشد، حاصل  $(2a+b, 12)$  کدام است؟

$$\underline{(8, 12)} = 4$$

$$\cancel{12 \text{ یا } 6 (2)}$$

$$b = 3$$

$$a = 3$$

$$b = 2$$

$$a = 9$$

$$\textcircled{4 \text{ یا } 2 (1)}$$

$$(2, 9) = 1$$

$$\cancel{12 \text{ یا } 6 (4)}$$

$$\cancel{6 \text{ یا } 2 (3)}$$

۳۴- به ازای چند عدد طبیعی بزرگتر از ۱ مانند  $m$ ، باقی مانده های تقسیم اعداد ۱۲۰ و ۴۵ بر  $m$ ، با هم برابر است؟

$$120 \equiv r \pmod{m}$$

$$45 \equiv r \pmod{m}$$

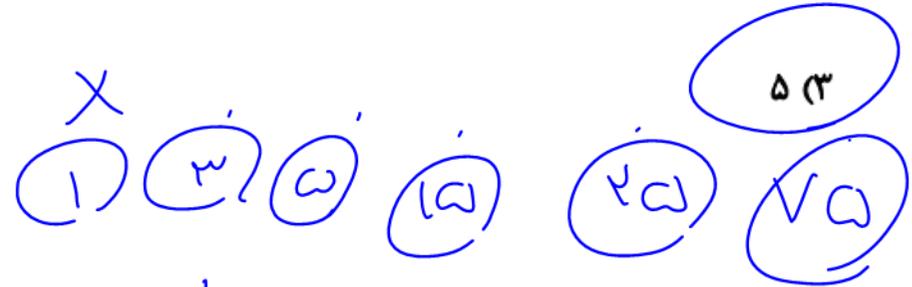
$$m \mid 120 - r$$

$$m \mid 45 - r$$

۴(۲)

۳(۱)

۶(۴)



$$\leadsto m \mid 15$$

۳۵- در تقسیم عدد  $2a+1$  بر  $23$ ، خارج قسمت،  $5$  واحد کمتر از باقی مانده است. حداکثر مقدار باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر  $36$  کدام است؟

$$2a+1 = 23q+r$$

۲۲ (۲)

۱۴ (۱)

$$r = q + 5$$

۲۴ (۴)

۲۶ (۳)

$$2a+1 = 23q + q + 5$$

$$2a+1 = 24q + 5 \rightarrow a = 12q + 2$$

$$12(2k+2) + 2 =$$

$$24k + 26$$

$$24k + 26$$

$$24k + 26$$

۳۶- اگر  $x = 2 \times 7^{15} + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم عدد  $x^2 - 2x$  بر ۴۷ کدام است؟

$$\begin{aligned} (7^2)^{7^2} &\equiv (7^2)^7 \equiv -1 \pmod{47} \\ 7^{14} &\equiv -1 \pmod{47} \\ 7^{15} &\equiv -7 \pmod{47} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 1 &\pmod{47} \\ (2 \times 7^{15})^2 - 1 &\pmod{47} \\ &\equiv 2 \pmod{47} \end{aligned}$$

۳۷- باقی مانده تقسیم عدد  $5^{172} + 7^{170}$  بر ۱۷ کدام است؟

۱۹ توان ۴ - ۲  $\equiv$   $(\sqrt{2})^4$

$\frac{6(2)}{13(4)}$

۲

۴(۱)

۱۱(۳)

$\sqrt{2}^{\wedge} \equiv -1$

توان ۱۶  $\sqrt{2}^{\wedge} \equiv -1$

$5^2 \equiv 25 \equiv 8 \pmod{17}$   
 $5^4 \equiv 8^2 \equiv 64 \equiv 13 \pmod{17}$   
 $5^8 \equiv 13^2 \equiv 169 \equiv 16 \pmod{17}$   
 $5^{16} \equiv 16^2 \equiv 256 \equiv 1 \pmod{17}$

توان ۲۱

$5^{19} \equiv 5^{16} \cdot 5^3 \equiv 1 \cdot 125 \equiv 125 \pmod{17}$   
 $5^{172} \equiv (5^{16})^{10} \cdot 5^4 \equiv 1 \cdot 13 \pmod{17}$   
 $7^{170} \equiv (7^2)^{85} \equiv 49^{85} \equiv 13^{85} \pmod{17}$   
 $13^2 \equiv 169 \equiv 16 \pmod{17}$   
 $13^4 \equiv 16^2 \equiv 256 \equiv 1 \pmod{17}$   
 $13^{85} \equiv 13^{4 \cdot 21 + 1} \equiv (13^4)^{21} \cdot 13 \equiv 1 \cdot 13 \pmod{17}$

۳۸- اگر عدد شش رقمی  $\overline{x^3y^8xx}$  بر ۹۹ بخش پذیر باشد، حاصل  $x^2 + y^2$  کدام است؟

$$3x + y + 11 \equiv 0 \pmod{9}$$

۶۵ (۲)

$$3x + y \equiv -11 \equiv 7 \pmod{9}$$

۸۵ (۴)

$$3x + y = \{ 7, 16, 25, 34 \}$$

$$x = 7 \quad y = 8$$

$$x - x + 1 - y + 3 - 2x \equiv 0 \pmod{11}$$

۶۱ (۱)

$$x + y \equiv 11 \pmod{11}$$

۷۳ (۳)

$$x + y = 11$$

۳۹- مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی سه رقمی  $x$  که در معادله سیاله خطی  $12x + 5y = 113$  صدق می کند، کدام است؟

Handwritten solution for the problem:

$12x + 5y = 113$   
 $12x \equiv 113 \pmod{5}$   
 $12x \equiv 13 \pmod{5}$   
 $2x \equiv 3 \pmod{5}$   
 $2x \equiv -2 \pmod{5}$   
 $x \equiv -1 \pmod{5}$   
 $x \equiv 4 \pmod{5}$

The possible values for  $x$  are: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59, 64, 69, 74, 79, 84, 89, 94, 99.

The largest three-digit natural number  $x$  is 99.

The sum of its digits is  $9 + 9 + 9 = 27$ .

The correct answer is 27.

۴۰- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $n$ ، معادله  $(5n-1)x + (3n+2)y = 15$  در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است؟

$$(5n-1, 3n+2) = d$$

۸۴ (۲)

۸۶ (۴)

$$d | 5n-1$$

$\times 2$

$$d | 3n+2$$

$\times 2$

$$d | 13$$

$$d = 1$$

$$13$$

$$(5n-1, 3n+2) = 13$$

۸۳ (۱)

۸۵ (۳)

$$13 | 15$$

$$13 | 15$$

$$3n+2 \equiv 13k$$

$$3n+2 \equiv 13k$$

$$3n \equiv 13k - 2$$

$$n \equiv 13k - 2$$

$$3n \equiv 13k$$

$$19 | 15n = 13k$$

$$k+1 \leq 99$$

$$1 \leq k$$

$$5 \leq k$$



