

۳۰ دقیقه

ریاضی (۱)

مجموعه، الگو و دنباله / مثلثات

فصل ۱ از ابتدای دنباله هندسی

تا پایان فصل و

فصل ۲ تا پایان دایره مثلثاتی

صفحه‌های ۲۵ تا ۴۱

۱- در دنباله هندسی  $3, a, b, 6\sqrt{2}, \dots$  چند جمله از دنباله کوچکتر از  $300$  است؟  $(\sqrt{2} = 1/4)$

۱۳ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۵ (۱)

$$3 \times r^3 = 6\sqrt{2} \rightarrow r^3 = 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3 \rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$a_n = 3 \times (\sqrt{2})^{n-1} < 300 \rightarrow (\sqrt{2})^{n-1} < 100$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} < 100 \xrightarrow{\div 2} 2^{\frac{n-1}{2}} < 50$$

$$\frac{n-1}{2} < 5 \rightarrow n-1 < 10 \rightarrow n < 11$$

کار... و ۱  $\rightarrow n$

۲- در یک دنباله هندسی  $a_2 + a_4 = 60$  و  $a_1 + a_3 = 20$  می‌باشد. در این دنباله، جمله بیستم چند برابر جمله هجدهم است؟

۴ (۴)

۹ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$a_2 + a_4 = a_1 r + a_1 r^3 = a_1 r (1+r^2) = 60 \xrightarrow{\div} r = 3$$

$$a_1 + a_3 = a_1 + a_1 r^2 = a_1 (1+r^2) = 20$$

$$\frac{a_1 60}{a_1 20} = r^2 = 3^2 = 9$$

۳- حاصل ضرب پنج عدد که تشکیل دنباله هندسی صعودی می‌دهند، برابر با  $2\sqrt[4]{2}$  است. اگر بزرگترین عدد، دو برابر کوچکترین عدد باشد،

بزرگترین عدد کدام است؟

$$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2 \xrightarrow{\times} a^5 = 2\sqrt[4]{2} = (\sqrt[4]{2})^5$$

$$\rightarrow a = \sqrt[4]{2}$$

$$ar^2 = 2 \times \frac{a}{r^2} \rightarrow r^4 = 2 \rightarrow r = \sqrt[4]{2}$$

$$ar^2 = \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

۴- در دنباله هندسی  $a_n$  با جمله اول  $a_1 = 2$  و قدرنسبت  $r$ ، داریم:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$ . اگر بدون تغییر قدرنسبت دنباله، جمله اول

دنباله را سه برابر کنیم، دنباله  $b_n$  حاصل می‌شود و مجموع پنج جمله اول دنباله  $b_n$  برابر با  $3^0$  خواهد بود. حاصل  $b_{14} - a_{17}$  کدام است؟

$$2 + 2r + 2r^2 + 2r^3 = 8 \rightarrow r + r^2 + r^3 = 3$$

$$4 + 4r + 4r^2 + 4r^3 + 4r^4 = 3^0 \rightarrow r + r^2 + r^3 + r^4 = 1$$

$$\rightarrow r^4 = 1 \rightarrow r = 1, -1 \rightarrow r = 1$$

$$a_n = 2 \times 1^{n-1} = 2$$

$$b_{14} - a_{17} = 4 - 2 = 2$$

$$b_n = 4 \times 1^{n-1} = 4$$

۵- در کشوری هر سال به طور میانگین ۵۰٪ تورم وجود دارد (هزینه‌ها هر سال ۵۰٪ افزایش می‌یابد) و حقوق کارمندان ۲۵٪ افزایش پیدا

می‌کند. در صورتی که نسبت درآمد به هزینه‌ها را قدرت خرید هر فرد در نظر بگیریم، پس از ۳ سال قدرت خرید کارمندان به صورت تقریبی

چقدر کاهش می‌یابد؟

۶۰٪ (۴)

۴۰٪ (۳)

۲۵٪ (۲)

۲۰٪ (۱)

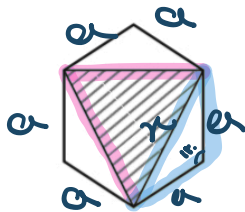
درآمد: ۱۰۰ → ۱۲۵ → ۱۵۶ → ۱۹۵

هزینه: ۱۰۰ → ۱۵۰ → ۲۲۵ → ۳۳۷

قدرت خرید: ۱۰۰٪

$$\frac{195}{337} = 0,57 \approx \underline{40\%}$$

۶- در شش ضلعی منتظم زیر، اگر مساحت ناحیه هاشورخورده  $27\sqrt{3}$  واحد مربع باشد، مساحت شش ضلعی منتظم کدام است؟



$$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \times a \times a \times \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 2a^2 \rightarrow x = \sqrt{2}a$$

۱۰۸ (۱)

۱۰۸√۳ (۲)

۱۶۲ (۳)

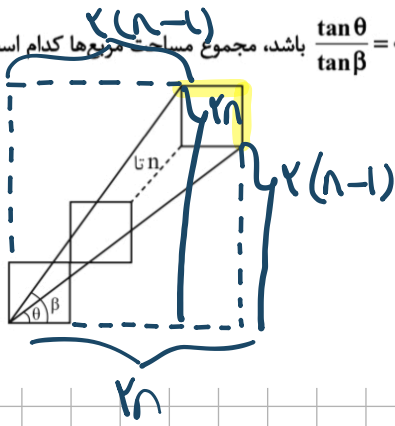
۱۶۲√۳ (۴)

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times a^2 = 27\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{27\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow a = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 27 = 144\sqrt{3}$$

۷- در شکل زیر تعدادی مربع به طول ضلع ۲ واحد به صورت زیر قرار گرفته‌اند. اگر  $\frac{\tan \theta}{\tan \beta} = 0.11$  باشد، مجموع مساحت مربعها کدام است؟



$$\tan \theta = \frac{2(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{n}$$

$$\tan \beta = \frac{2n}{2(n-1)} = \frac{n}{n-1}$$

- (1) ۴۰  
(۲) ۴۲  
(۳) ۴۴  
(۴) ۴۸

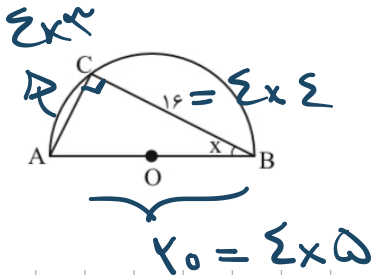
$$\rightarrow \frac{\tan \theta}{\tan \beta} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = 0.11$$

$$\rightarrow \frac{n-1}{n} = 0.11 = \frac{11}{100} \rightarrow 10n - 10 = 11n \rightarrow n = 10$$

$$S = 10 \times (2 \times 2) = 40$$



۸- در شکل زیر که یک نیم دایره به شعاع ۱۰ سانتی متر است،  $\tan x$  کدام است؟



نکته: زاویه کاطی روبرو قطر =  $90^\circ$

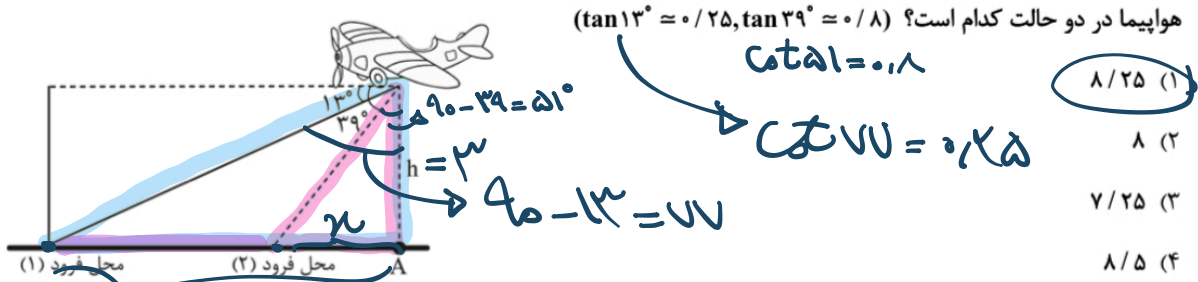
- (1) ۰/۸  
(۲) ۰/۶  
(۳) ۰/۷۵  
(۴) ۰/۵

$$AC^2 + 14^2 = 10^2 \rightarrow AC = 12$$

$$\tan x = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

۹- یک هواپیما در ارتفاع ۳ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود  $13^\circ$  باشد، هواپیما در فاصله  $x_1$

از نقطه A فرود می‌آید و اگر زاویه هواپیما با افق حدود  $39^\circ$  شود، هواپیما در فاصله  $x_2$  از نقطه A فرود می‌آید. اختلاف محل فرود

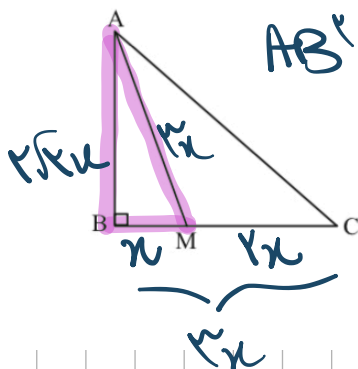


$$\cot \alpha = \frac{h}{x} = 0.18 \rightarrow x = \frac{h}{0.18} = 16.67$$

$$\cot \alpha = \frac{h}{x} = 0.18 \rightarrow x = 16.67$$

$$16.67 - 16.67 = 0$$

۱۰- در شکل زیر اگر  $AM = BC$  و  $BM = \frac{1}{2}MC$  باشد، حاصل  $\tan \hat{C} + \cot \hat{A}$  کدام است؟



$$AB^2 + x^2 = 4x^2$$

$$AB^2 = 3x^2$$

$$AB = \sqrt{3}x$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
 (۱)

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
 (۲)

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}$$
 (۳)

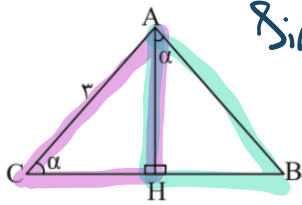
$$\frac{2\sqrt{2}}{4}$$
 (۴)

$$\tan C = \frac{AB}{MC} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BM} = \frac{\sqrt{3}x}{x} = \sqrt{3}$$

$$+ \rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

۱۱- در شکل زیر مقدار BH، بر حسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $\alpha$  کدام است؟ ( $AC = 3$ )



$$\sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{3}$$

$$\rightarrow AH = 3 \sin \alpha$$

(۱)  $\sin^2 \alpha$

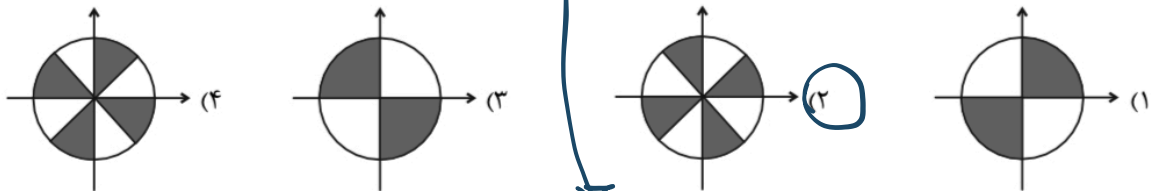
(۲)  $\cos^2 \alpha$

(۳)  $3 \sin \alpha \cos \alpha$

(۴)  $3 \sin \alpha \tan \alpha$

$$\tan \alpha = \frac{BH}{AH} = \frac{BH}{3 \sin \alpha} \rightarrow BH = 3 \sin \alpha \times \tan \alpha$$

۱۲- در صورتی که برای زاویه  $\hat{x}$ ، تساوی  $\sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x} - 2 = \cot x - \tan x$  برقرار باشد. کدام گزینه نشان‌دهنده محدوده زاویه  $x$  می‌باشد؟



$$-2 = -2x \tan x \times \cot x \quad (\tan x - \cot x)^2$$

$$|\tan x - \cot x| = \cot x - \tan x$$

$$\tan x - \cot x < 0 \rightarrow \tan x < \cot x$$

۱۳- به ازای چند مقدار متمایز برای  $m$ ، دو زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  پیدا می‌شوند که  $\sin \alpha = |m|$  و  $\cos \beta = \frac{1}{|m|}$  باشد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) چهار

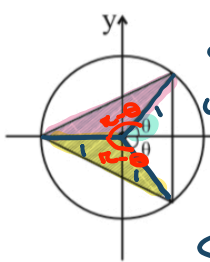
(۲) دو

(۱) صفر

Handwritten solution for question 13:

$|m| < 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $|m| < 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $m = \pm 1$   
 $|m| < 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $|m| = 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $m = \pm 1$   
 $|m| < 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $|m| < 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $m = \pm 1$   
 $|m| < 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $|m| < 1$  (circled in green)  $\rightarrow$   $m = \pm 1$

۱۴- با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$S_{\text{زرد}} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin (2\pi - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\rightarrow S_{\text{هاشور}} = \sin \theta$$

(۱)  $\sin \theta \cos \theta$

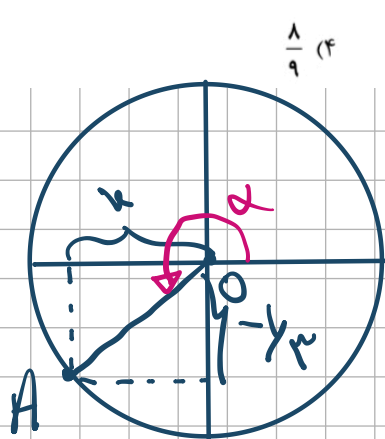
(۲)  $\sin \theta$  (circled)

(۳)  $\cos \theta + \sin \theta$

(۴)  $1 + \cos \theta$

۱۵- اگر نقطه  $A(x, \frac{-1}{3})$  انتهای کمانی روی دایره مثلثاتی، واقع در ربع سوم باشد و  $\alpha$  زاویه‌ای است که  $OA$  با جهت مثبت محور  $x$  ها

می‌سازد، حاصل  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \tan^2 \alpha$  کدام است؟

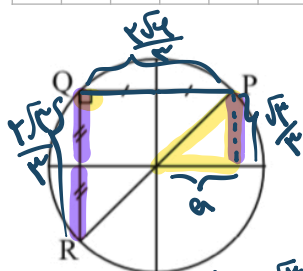


$\frac{1}{9}$  (۴)       $(-\frac{1}{3})$  (۳)       $\frac{1}{9}$  (۲)       $\frac{1}{9}$  (۱)

$$\sin \alpha = \frac{-1}{3} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{1} - 4 = -\frac{11}{1}$$



۱۶- در دایره مثلثاتی زیر، نقطه  $P(a, \frac{\sqrt{3}}{3})$  مفروض است. مساحت  $\Delta PQR$  چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

$\frac{2}{3}$  (۲)       $\frac{4}{3}$  (۴)

$\frac{1}{3}$  (۱)       $1$  (۳)

$$a^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 1$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



۱۷- اگر  $-10^\circ < \alpha < 10^\circ$  و  $-20^\circ < \beta < 20^\circ$  و همچنین  $\cos 2\beta = \frac{2+n}{3}$  و  $\cos 2\alpha = \frac{m+1}{2}$  باشد، در چه بازه‌ای قرار دارد؟

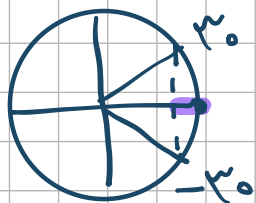
$(0, \sqrt{3} - \frac{1}{2})$  (۴)

$(\sqrt{3} - 2, \frac{3}{2})$  (۳)

$(\sqrt{3} - 2, 0)$  (۲)

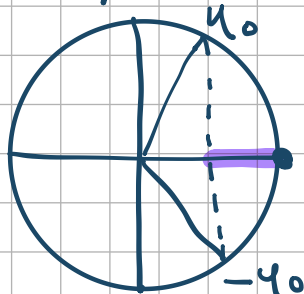
$(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  (۱)

$-30^\circ < \alpha < 30^\circ \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos \alpha \leq 1 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{m+1}{2} \leq 1$



$\rightarrow \sqrt{3} < m+1 \leq 2 \rightarrow \sqrt{3} - 1 < m \leq 1$

$-40^\circ < \beta < 40^\circ \rightarrow \frac{1}{2} < \cos 2\beta \leq 1 \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2+n}{3} \leq 1$



$\rightarrow \frac{1}{2} < 2+n \leq 3$

$\rightarrow -\frac{1}{2} < n \leq 1$

$m-n \rightarrow \sqrt{3} - 2 < m-n \leq \frac{3}{2}$

۱۸- اگر  $\sin(x-2y) + 2\sin(2x-y) = 3$  باشد، حاصل  $\cos(x+3y)$  کدام است؟ ( $0^\circ \leq x-2y, 2x-y \leq 180^\circ$ )

$\frac{1}{2}$  (۴)

صفر (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

$x-2y = 90^\circ$   
 $2x-y = 90^\circ \rightarrow x = 30^\circ, y = -30^\circ$

$\cos(30^\circ + (-90^\circ)) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

۱۹- خط  $l$  از نقطه  $(0, -3)$  می‌گذرد و با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $37^\circ$  می‌سازد. مساحت مثلثی که از برخورد این خط با محورهای

$$\alpha = \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

مختصات به وجود می‌آید، کدام است؟  $(\cot 37^\circ = \frac{4}{3})$

۱۲ (۴)

۳ (۳)

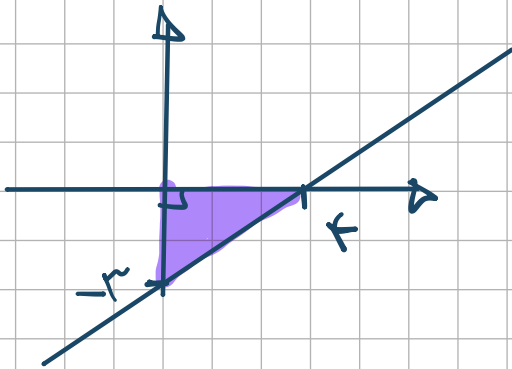
۴ (۲)

۶ (۱)

$$y = ax + b \rightarrow y = \frac{3}{4}x + b$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$-3 = \frac{3}{4}x_0 + b \rightarrow b = -3$$



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

۲۰- دو خط که با جهت مثبت محور  $x$  زاویه‌های  $60^\circ$  و  $135^\circ$  ایجاد می‌کنند، در نقطه  $A(-1, 2)$  متقاطع‌اند. مساحت مثلث محصور بین دو

$$\tan \beta = -1 \rightarrow \sqrt{3} = \tan \alpha$$

$$\frac{2(3-\sqrt{3})}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}} \quad (۳)$$

$$2(\sqrt{3}-1) \quad (۲)$$

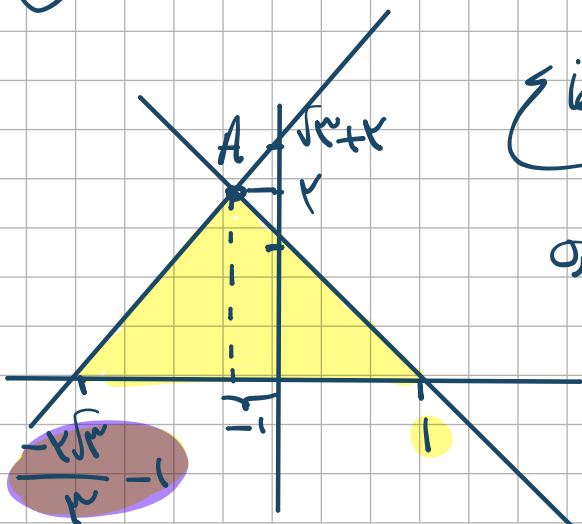
$$2(\sqrt{3}+1) \quad (۱)$$

$$y = ax + b \rightarrow y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{A} 2 = -\sqrt{3} + b$$

$$\rightarrow b = \sqrt{3} + 2$$

$$y_1 = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2$$

$$y = -x + b \xrightarrow{A} 2 = 1 + b \rightarrow b = 1 \rightarrow y_2 = -x + 1$$



$$|x| = 1$$

$$|y| = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times |x| \times |y| = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$$