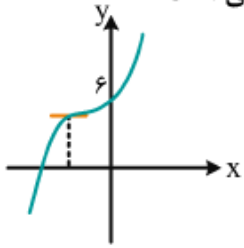


$$m^2 + 2m + 9$$

1- تابعی خطی است و نمودار تابع $g(x) = x(x+2)^2 + f(x)$ به شکل روبه‌رو است. $f^{-1}(-3)$ چه عددی است؟



$$f(x) = ax + b$$

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$$

$$g(m) = (m+2)^3 + am + b$$

$$g(m) = (m+2)^3 + \frac{(a-3)m}{0} + b - 6$$

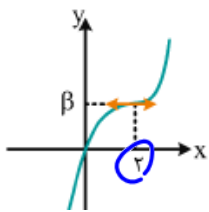
$$g(x) = (x+2)^3 + b - 6 \rightarrow g(0) = b - 6$$

6	(1)
-3	(2)
3	(3)
4	(4)

$$f(x) = 3x + 6$$

$$-3 = 3x + 6$$

2- نمودار $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \frac{1}{\beta} \alpha^2 x$ به شکل روبه‌رو است. نمودار تابع $g(x) = \sqrt{\beta - x} + \alpha$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟



$$f(x) = (x - \frac{\alpha}{3})^3 + \frac{\alpha^3}{27}$$

$$f(x) = (x - 2)^3 + 1$$

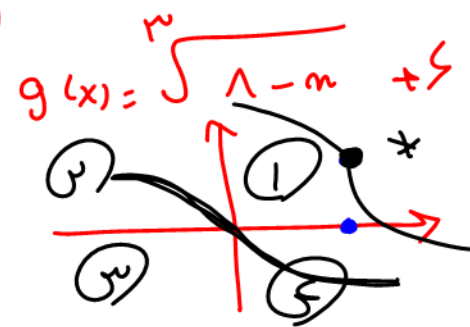
- اول (1)
- دوم (2)
- سوم (3)
- چهارم (4)

$$\frac{\alpha}{3} = 2 \Rightarrow \alpha = 6$$

$$\beta = \frac{\alpha^3}{27} \Rightarrow \frac{6^3}{27} = 1$$

$$\alpha = 6$$

$$\beta = 1$$



3- اگر $y = f(1 + \frac{x}{r})$ را نسبت به خط $x = k$ و مبدأ مختصات متوالیاً قرینه‌یابی کنیم و نمودار بدست آمده را نسبت به خط $y = x$

$$f(x) \rightarrow -f(-x)$$

قرینه کنیم، به تابع $y = rf^{-1}(-x)$ می‌رسیم. k کدام است؟

$$f(1 + \frac{x}{r}) \rightarrow f(1 + \frac{rk - x}{r}) = f(1 + k - \frac{x}{r})$$

$$y = -f(1 + k + \frac{x}{r}) \rightarrow -y = f(1 + k + \frac{x}{r})$$

$$f^{-1}(-y) = 1 + k + \frac{x}{r} \rightarrow rf^{-1}(-y) - r - rk = x$$

$$y = rf^{-1}(-x) \rightarrow -r - rk = x$$

$$-r = rk$$

$$k = -1$$

۴- اگر $A(-1, 2)$ روی نمودار تابع $y = f^{-1}(1-x)$ قرار گرفته باشد، نقطه متناظر با آن روی نمودار تابع $y = -2 + f(\frac{x}{3})$ تا مبدأ

مختصات به کدام فاصله است؟

$f^{-1}(2) = -1$ (۲) $f^{-1}(1-(-1)) = 2$ (۳) $f(2) = -1$ (۴)

$\frac{x}{3} = 2 \rightarrow x = 6$

$x = 6 \quad y = -1$

۵- تابع f با دامنه \mathbb{R} نزولی اکید است به طوری که $f(2) = 0$. اگر $g(x) = \sqrt{(4-ax)f(2-x)}$ تابعی با دامنه \mathbb{R} باشد، مقدار a کدام

است؟

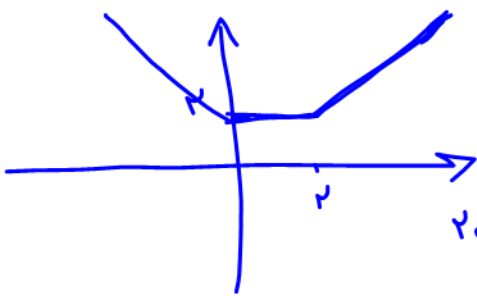
$f(2) = 0$ (۴) $f(2-x) = 0$ (۳) $2-x = 2 \rightarrow x = 0$ (۴)

$f(x) = f(-x)$ نزولی اکید / اندام صعودی

$4-ax = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow 4+a = 0 \rightarrow a = -4$

$g(x) = \sqrt{(4+4x)f(2-x)}$

۶- با فرض $f(x) = |x| + |x-2|$ کدام تابع صعودی اکید است؟



$y = f(2x) - x$ (۲) $y = 2x + f(1-x)$ (۱)

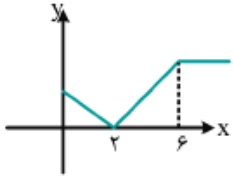
$f(\frac{x}{3}) + x$ (۴) $y = x + f(\frac{x}{3} - 1)$ (۳)

$x > 2 \rightarrow 2x - 2 + x = 3x - 2$ (۲) $x > 2 \rightarrow 2x + 1 - x = x + 1$ (۱)

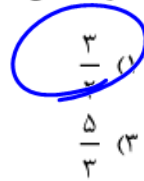
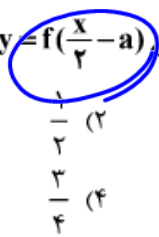
$0 < x < 2 \rightarrow 2x + 2 - x = x + 2$ (۲) $0 < x < 2 \rightarrow 2x + 1 - x = x + 1$ (۱)

$x < 0 \rightarrow -2x + 2 - x = -3x + 2$ (۲) $x < 0 \rightarrow 2x + 1 - x = x + 1$ (۱)

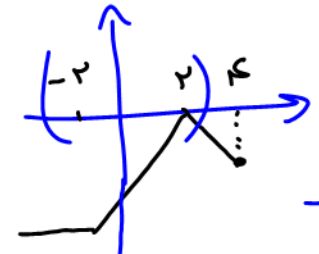
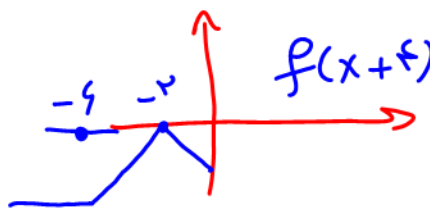
۷- نمودار تابع $y = -f(4-x)$ به شکل روبه‌رو است. تابع $y = f(\frac{x}{2} - a)$ فقط در بازه $[-1, 7]$ صعودی اکید است. مقدار a کدام است؟



$4 + 2a = 7$
 $2a = 3$
 $a = \frac{3}{2}$



$f(4-x)$ \rightarrow $f(4+x) = f(x+4)$ \rightarrow $f(x)$



$f(x) \in [-2, 2]$
 $-2 \leq \frac{x}{2} - a \leq 2$
 $-4 + 2a \leq \frac{x}{2} \leq 4 + 2a$

۸- اگر $f(x) = (k^3 - 5)x^3 + 2$ و $k \in \mathbb{N}$ تابعی نزولی اکید باشد، مقدار $f^{-1} \circ f^{-1}(-30)$ چه عددی است؟

9^m
 صعودی
 است

2^m
 9^m
 نزولی
 است

$k^3 - 5 < 0$
 $k = 1 : -4 < 0 \checkmark$
 $k = 2 : 3 > 0 \times$

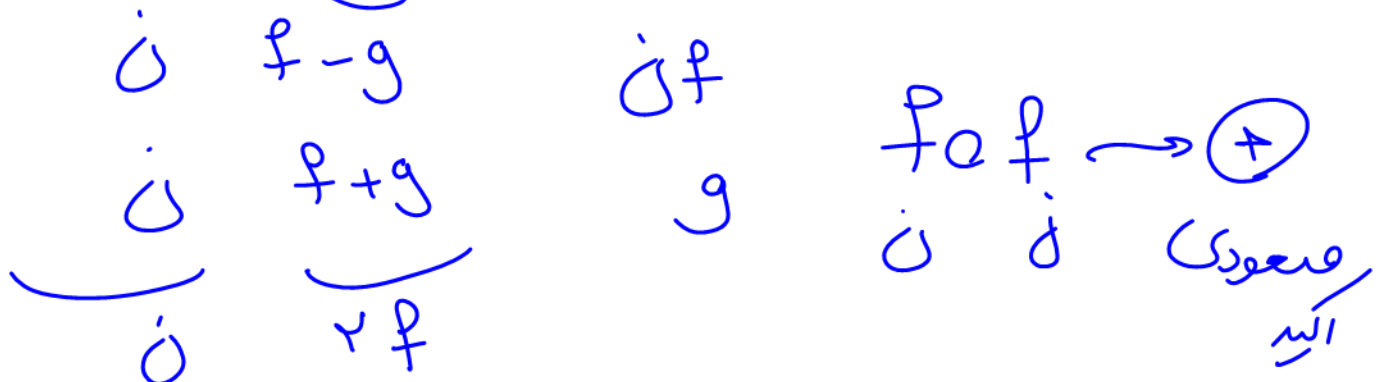
$f(x) = -4x^3 + 2$

$-30 = -4x^3 + 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow f^{-1}(2)$

$2 = -4x^3 + 2 \rightarrow x = 0$

۹- توابع f و g با دامنه \mathbb{R} مفروضند. اگر $f+g$ و $f-g$ هر دو نزولی اکید باشند، کدام تابع صعودی اکید است؟

$f \circ f$ (4)
 $f \circ g$ (2)
 $f \times g$ (1)



10- تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده، نمودار حاصل را چند واحد به سمت راست انتقال دهیم تا نمودار اصلی را در $x=3$ قطع کند؟

$$\frac{-n+k}{n-k+1} = \frac{x}{x-1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{5} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{13}{18}$$

11- فرض کنید $f(x) = x^2 + 5x + 6$ و $g(x) = x^2 - 3x + 2$ باشد. اگر برای g دو تابع چندجمله‌ای درجه اول یافت شود، مجموع ضابطه‌های این دو تابع g کدام است؟

$$(x-1)(x-2) \quad (x-1)(x-3) \quad (x-2)(x-3) \quad (x-1)(x-3)$$

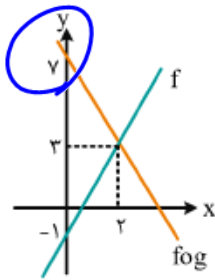
$$x^2 + 8x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$f \circ g \quad x \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow y$

$$g(x) = 13 \quad (13+2)(13+3) = (x-1)(x-2)$$

$$\begin{cases} 13+2 = x-1 \\ 13+3 = x-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13+2 = x-2 \\ 13+3 = x-1 \end{cases} \quad x-4$$

12- توابع f و g خطی و نمودار f و $g \circ f$ به صورت مقابل است. ضابطه وارون تابع $y = \frac{f+g}{f-g}(x)$ کدام است؟



$$f(x) = 2x - 1 \quad g(x) = x - 1$$

$$f(2) = 3 \quad f(g(2)) = 5$$

$$g(2) = 1 \quad f(1) = 1$$

$$f(g(1)) = 1 \quad g(1) = 0 \quad f(0) = -1$$

$$\begin{cases} \frac{5x+3}{3x-1} & (1) \\ \frac{x+3}{3x-5} & (2) \\ \frac{3x+5}{x-1} & (3) \\ \frac{x+1}{3x-5} & (4) \end{cases}$$

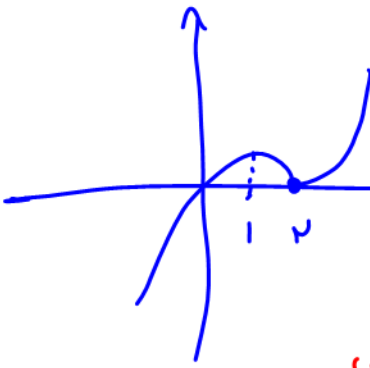
13- اگر f تابعی وارون پذیر و $f(2x-1) + g(x-2) = 1$ باشد، آن گاه به ازای کدام مقدار k رابطه $f^{-1}(x) - 2g^{-1}(1-x) = k$ همواره برقرار است؟

$$f(2x-1) = \alpha \quad \alpha + g(x-2) = 1$$

$$f^{-1}(\alpha) = 2x-1 \quad g(x-2) = 1-\alpha$$

$$2g^{-1}(1-\alpha) = 2x-1$$

$$f^{-1} - 2g^{-1} = -1 - (-4) = 3$$



۱۴- ضابطه وارون تابع $f(x) = x|x-2|$ در بزرگترین بازه‌ای که تابع اکیداً نزولی است کدام است؟

$1 - \sqrt{x-1}; 1 \leq x \leq 2$ (۲)

$1 + \sqrt{x-1}; 1 \leq x \leq 2$ (۱)

$1 + \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$ (۴)

$1 - \sqrt{1-x}; 0 \leq x \leq 1$ (۳)

$[1, 2] \quad 1 < x < 2 \quad \left. \vphantom{[1, 2]} \right\} 0 < y < 1$

$y = -n(n-2) = -n^2 + 2n = -(n-1)^2 + 1$

$y-1 = -(x-1)^2 \rightarrow x = -(y-1)^2 + 1$

$y = 1 - \sqrt{1-n}$

۱۵- تابع $f(x) = \frac{ax+12}{2x+b}$ وارون خود را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. حاصل $\log_{\sqrt{2}}(b-a)$ کدام است؟ ($a \neq -b$)

$f(x) = x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓

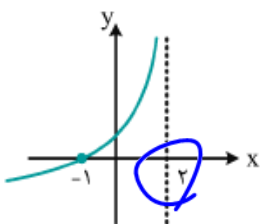
$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{ax+12}{2x+b} = x \rightarrow 2x^2 + bx = ax+12$

$2x^2 + (b-a)x - 12 = 0 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ -12 \end{matrix}$

$-1 = -\frac{(b-a)}{2} \rightarrow b-a = 2$



۱۶- اگر $f(x) = \frac{a}{x+b}$ و نمودار تابع $y = \log_{\sqrt{2}} f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، مقدار $f^{-1}(2)$ کدام است؟

$\log_{\sqrt{2}} \frac{a}{x+b} > 0 \quad (-\infty, 2)$

$\log_{\sqrt{2}} \frac{a}{x-2}$

$\log_{\sqrt{2}} \frac{a}{-2} = 0 \rightarrow 1 = \frac{a}{-2}$

$a = -2$

$f(x) = \frac{-2}{x-2} = 2$

۱۷- اگر $\log_{\sqrt{x}}^x = \sqrt[3]{0.25}$ باشد، حاصل \log_x^2 کدام است؟

$\log_{\sqrt{x}}^x = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ $\log_{\sqrt{x}}^x = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
 $\log_{\sqrt{x}}^x = -\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 2 \log_{\sqrt{x}}^x = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\log_{\sqrt{x}}^x = -\frac{1}{\sqrt{x}}$
 $\log_{\sqrt{x}}^x = \frac{1}{\log_x^{\sqrt{x}}}$ $\log_x^{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}}$

۱۸- توابع $f(x) = \log_2 \left(\frac{1+x}{9}\right)$ و $g(x) = 2(2^{2x} - \frac{5}{2})$ مفروض اند. اگر α و β ریشه های معادله $f^{-1}(x) = g(x)$ باشند، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

$y = \log_2 \left(\frac{1+x}{9}\right) \rightarrow 2^y = \frac{1+x}{9} \rightarrow 9(2^y) = 1+x$
 $x = 9(2^y - 1) \rightarrow y = 9(2^x - 1) = 2(2^{2x} - \frac{5}{2})$
 $2(2^{2x} - \frac{5}{2}) = 9(2^x - 1) \rightarrow 2^{2x} - 2.5 = 4.5 \cdot 2^x - 9$
 $2^{2x} - 4.5 \cdot 2^x + 6.5 = 0$
 $2^x = t \rightarrow t^2 - 4.5t + 6.5 = 0$
 $t = 4$
 $t = \frac{1}{2}$

$x = 2^{\alpha-1}$
 $y = 2^{\alpha-2}$
 $x+y = 2^{\alpha}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2^{\alpha}}{2^{\alpha-1} \cdot 2^{\alpha-2}} = 18$
 ۱۹- اگر $1 + \log_2^x = 2 + \log_2^y = \log_2^{(x+y)}$ باشد، حاصل $x^{-1} + y^{-1}$ کدام است؟

۲۰- عنصری در هر ۳۰ روز، ۴ درصد جرم باقی مانده خودش را از دست می دهد. پس از گذشت چند روز ۱۲/۵ درصد جرم آن باقی می ماند؟

$\log 2 = 0.3$, $\log 12 = 1.08$
 $\log 2 = 2 \log 2 + \log 2$
 $\log 2 = 0.4$

$n \log \frac{96}{100} = \log \frac{12.5}{100}$
 $n (\log 96 - 2) = \log (12.5) - 2$
 $n (\log 2 + \log 3 - 2) = 3 \log 2 - 2$
 $n (1.8 + 0.48 - 2) = 3(0.3) - 2 \rightarrow$