۹۶- به ازای دو مقدار حقیقی k، معادلهٔ $\frac{۲x-۳}{x-۱}+\frac{k}{x-۳}=\frac{۲}{x^۲-۴x+۳}$ جواب ندارد. میانگین این دو مقدار کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$۲x^۲-۹x+۹+kx-k=۹$

$۲x^۲-(۹-k)x-k+۷=۰$

$x_۱=۱$

$x_۲=\frac{۷-k}{۲}$

$\frac{۷-k}{۲}=۱$ ⇝ $k=۵$

$\frac{۷-k}{۲}=۳$ ⇝ $k=۱$

۹۷- در یک مستطیل به طول a و عرض b رابطهٔ $\frac{1-\frac{a}{b}}{4\frac{a}{b}+3} = \frac{b}{9a}$ برقرار است. چند برابر عرض مستطیل را به طول مستطیل اضافه کنیم تا به یک مستطیل طلایی تبدیل شود؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$

$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\frac{a}{4a+3b} = \frac{b}{9a}$

$\frac{1}{4+3t} = \frac{t}{4}$

$3t^2+4t-4=0$

$-6 \xrightarrow{\div 3} -2$

$+2 \xrightarrow{\div 3} \frac{2}{3}$

$a = \frac{3}{2}b$

چند برابر عرض $\frac{ka+b}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$k+\frac{3}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$k = \frac{\sqrt{5}-2}{2}$

۹۸- مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{10}$ ۲) ۷ ۳) $4+2\sqrt{10}$ ۴) ۸

$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

$\left(x - \dfrac{3x}{x+3}\right)^2 + \dfrac{6x^2}{x+3} = 7$

$\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)^2 + \dfrac{6x^2}{x+3} = 7$

$t^2 + 6t - 7 = 0$

$t = 1 = \dfrac{x^2}{x+3} \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0$

$t = -7 = \dfrac{x^2}{x+3} \Rightarrow x^2 + 7x + 21 \quad \Delta < 0$

۹۹- ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{5x+4}-\sqrt{3x+3}=\sqrt{2x+1}$ را a فرض کنید. مجموعه جواب نامعادله $x^2+4ax-3<0$ کدام است؟

۱) $(-3,1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(-\frac{1}{2},6)$ ۴) $(-6,\frac{1}{2})$

$5x+4 = 5x+3 + 2\sqrt{(3x+3)(2x+1)}$

$x=-1$ $\quad x=-\frac{1}{2}$

$x^2-2x-3<0$

$-1<x<3$

۱۰۰- دستگاه A به تنهایی کاری را در ۳۰ ساعت انجام می‌دهد. اگر دستگاه A و B با هم کار کنند، کل کار را در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند. اگر دستگاه A به مدت ۱۲ ساعت به تنهایی کار کند و سپس خاموش شود و به مدت n ساعت دستگاه B روشن شود و به تنهایی کار را پیش ببرد، مجموعاً ۸۰ درصد کار انجام می‌شود. مقدار n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

$$\frac{1}{۳۰}+\frac{1}{n}=\frac{1}{۱۲}=\frac{۳}{۴۰}=\frac{1}{۲۰}\Rightarrow n=۲۰$$

$$۱۲\times\frac{1}{۳۰}+n\times\frac{1}{۲۰}=\frac{۸}{۱۰}\rightsquigarrow n=۸$$

۱۰۱- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax-\sqrt{۶x+a}+۱=۰$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. حاصل‌ضرب ریشه‌های آن کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

$$ax+۱=\sqrt{۶x+a}$$

$$a^۲x^۲+۲ax+۱=۶x+a \rightsquigarrow a^۲x^۲+۲(a-۳)x+۱-a=۰$$

$$\alpha+\beta=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\frac{-b}{a}} \frac{-۲(a-۳)}{a^۲}=\frac{۱}{۲} \rightsquigarrow a^۲+۴a-۱۲=۰$$

$$\alpha\beta=? \rightarrow \frac{۱-a}{a^۲}=\frac{-۱}{۴}$$

۲ ۶ ۱۲

۱۰۲- معادلهٔ $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}$، چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

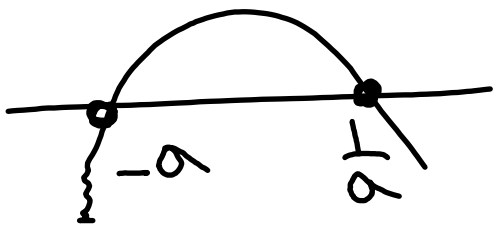
۱۰۳- اگر $x=-۵$ کوچک‌ترین عدد صحیح عضو مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x+a}{۱-ax}>۰$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵/۵

۲) ۶/۵

۳) $\frac{۱۱}{۶۰}$

۴) $\frac{۱۳}{۶۰}$

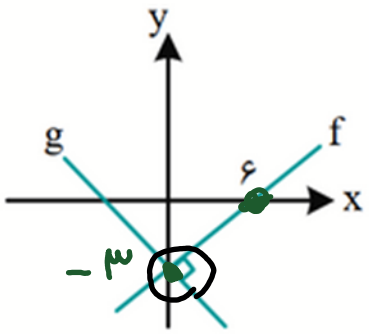


$(-۵ , \frac{۱}{۵})$

$-۶ \leq -۵ < -۵$

$۵ < ۵ \leq ۶$

۱۰۴- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر تابع $y=f(x)-mx$ ثابت و تابع $y=2mx+g(x)+n$ همانی باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۶/۵
۳) ۵/۵
۴) ۷ ✓

$f(x)=mx+k$

$g(x)=-\frac{1}{m}x+k$

$y=(2m-\frac{1}{m})x+k+n$ $\xrightarrow{=1}$ $y=x$

$m=1$

$k=-n$

$f(4)=0 \Rightarrow 4+k=0 \rightarrow -4$

$n=4$

۱۰۵- دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{۲x^۲+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{n\}$ است، به طوری که n عددی طبیعی است. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x+a}{b-x}>۰$ شامل ۵ عدد صحیح باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$۲(۹n-n)^۲ \rightsquigarrow ۲۹n^۲ - ۴n\cdot ۹n + ۲n^۲$

a b

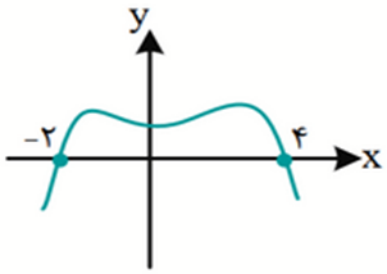
$\frac{۹n-۴n}{۲n^۲-۹n}>۰ \rightsquigarrow$

$۴n<۹n<۲n^۲$

$۲n^۲-۴n-۱=۰ \rightarrow n^۲-۲n-۳=۰$

$n=۳$ ~~-۱~~

۱۰۶- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{|x-a|}{f(x)}}$ بازهٔ (α,β) باشد، مجموع مقادیر صحیح ممکن برای a کدام است؟



۱) ۷
۲) ۱
۳) ۵
۴) صفر

۱۰۷- برد تابع $f(x)=x+\frac{۹}{x-۲}$ با فرض $x>۲$ به صورت $[a,+\infty)$ است. مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۸/۲۵ ۲) ۹/۵ ۳) ۸/۵ ۴) ۹/۲۵

$a+b \geq ۲\sqrt{ab}$

$x-۲+\frac{۹}{x-۲} \geq ۲\sqrt{۹} \Rightarrow x-۲+\frac{۹}{x-۲} \geq ۶ \rightarrow x+\frac{۹}{x-۲} \geq ۸$

$f(۸)=۸+\frac{۹}{۸-۲}=۹/۵$

۱۰۸- اگر $f(x-1)=\frac{x-2}{x^2+ax+b}$ و $g(x+1)=\frac{1}{x+c}$ و توابع $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند، حاصل $f(c)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

$f=g \Rightarrow D_f=D_g$, $R_f=R_g$

$g(x-1)=\frac{1}{x-2+c}=\frac{x-2}{x^2+ax+b}$

$f(x-1)$

$\frac{x-2}{(x-3)^2}=\frac{1}{x-2+c}$

$c=0$

$f(x-1)=\frac{1}{x-2}$

$=0 \rightarrow x=1$

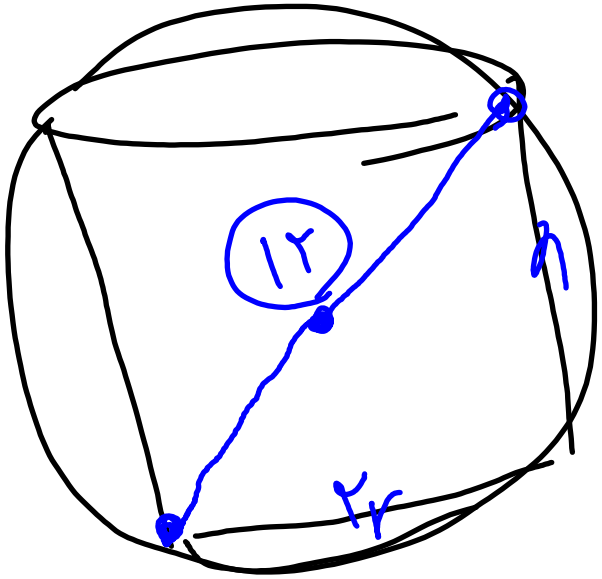
۱۰۹- استوانه‌ای قائم با شعاع قاعدهٔ r را درون کره‌ای به شعاع ۶ محاط کرده‌ایم. مساحت جانبی استوانه را به صورت تابعی از r نوشته‌ایم. ضابطه این تابع کدام است؟

۱) $۲\pi r\sqrt{۳۶-r^۲}$

۲) $۴\pi r\sqrt{۳۶-r^۲}$ ✓

۳) $۲\pi r\sqrt{۲۷-r^۲}$

۴) $۴\pi r\sqrt{۲۷-r^۲}$

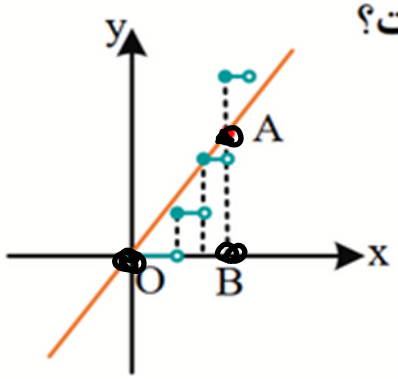


$h^۲ + ۴r^۲ = ۱۴۴ \rightarrow h = \sqrt{۱۴۴ - ۴r^۲}$

$S = ۲\pi rh \rightarrow S = ۲\pi r\sqrt{۱۴۴-۴r^۲}$

$۴\pi r\sqrt{۳۶-r^۲}$

۱۱۰- در شکل مقابل، نمودار توابع $y=\left[2x^2\right]$ و $y=2x$ رسم شده‌اند. مساحت مثلث $\triangle OAB$ چقدر است؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۱/۵
۴) ۱

$\left[2x^2\right]=2$

$2 \le 2x^2 < 3 \rightarrow 1 \le x < \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

۱۱۱- توابع $f+g$ و $f-g$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ نزولی اکید هستند. کدام تابع، صعودی اکید است؟

۱) $x+f(x)$ ۲) $x-f(x)$ ۳) $x+g(x)$ ۴) $x-g(x)$

$(f-g)+(f+g)=2f$ ← اگر f نزولی

۱۱۲- فرض کنید $f(x)=x^2+\log x$ باشد. در مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x-1)<f(\frac{10}{x+2})$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) $x>1$ (۱)

۲) اکیداً صعودی (۲)

۳) ۳

۴) ۴

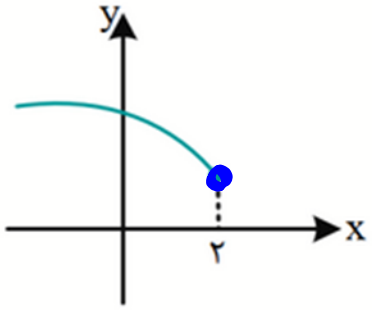
$$x-1<\frac{10}{x+2} \Rightarrow (x-1)(x+2)<10$$

$$x^2+x-12<0$$

$$-4<x<3$$

$$1<x<3$$

۱۱۳- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(\frac{x}{۲}) \geq f(۲x+a)$ یک مجموعهٔ تک عضوی باشد، مقدار a کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۴}$

۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $-\frac{۳}{۲}$

۴) -۶

$\frac{x}{۲} \geq ۲x+a$

$x \geq -\frac{۲a}{۳} = ۴$

$a \geq -۶$

$\frac{x}{۲} \leq ۲ \rightarrow x \leq ۴$

$۲x+a \geq ۲x$

$x \geq -\frac{a}{۲} = -\frac{۲a}{۳}$

$a = -۶$

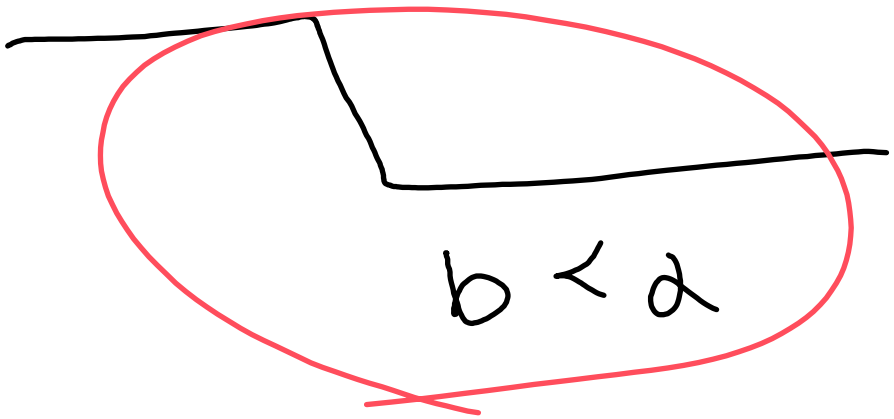
۱۱۴- تابع $y=|x-a|-|x+2a-12|$ در $\mathbb{R}$ نزولی است. حدود a کدام است؟

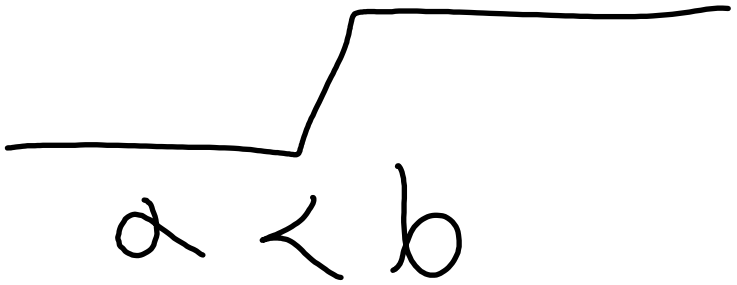
۱) $a \le -4$

۲) $a \ge -4$

۳) $a \ge 4$

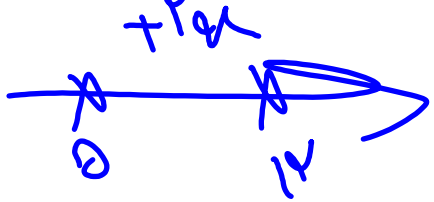
۴) $a \le 4$



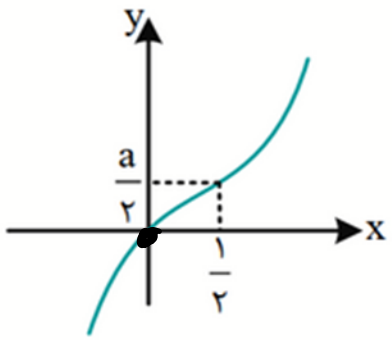


$12-2a \le a \Rightarrow 4 \le a$

$a=0 \rightsquigarrow |x|-|x-12|$



۱۱۵- نمودار تابع $f(x)=(ax+b)(۳+۴x^۲)+۹$ به صورت مقابل است. کدام تابع زیر اکیداً نزولی است؟



۱) $(b+۲)x^۳-a$

۲) $(a-۱)x^۳+b$

۳) $(۳-a)x^۳-b$

۴) $(۲-b)x^۳+a$

$(b)(۳)+۹=۰$

$b=-۳$