تحلیل سوالات حسابان آزمون ماز – ۲۰ مهر ۱۴۰۲

۱- تابع $f(x)=\frac{۲x^۲+ax-۵}{x^۲+۳x+b}$ ثابت است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲}$

$$\frac{2}{1}=\frac{a}{3}=\frac{-5}{b} \rightarrow a=6,\quad b=-\frac{5}{2}$$

$f(x)=x$

۲- تابع $f(x)=(۷-۲x)(x+a)+bx^۲+bx+c$ همانی است. مقدار c کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۱۸ ۳) -۲۴ ۴) -۲۸

$$f(x)=7x+7a-2x^2-2xa+bx^2+bx+c=x$$

$$(-2+b)x^2+(7-2a+b)x+7a+c=x$$

$-2+b=0 \rightarrow b=2$

$7-2a+2=1 \rightarrow a=4$

$28+c=0 \quad c=-28$

۳- f تابعی خطی و غیرثابت است و به ازای هر مقدار حقیقی x، تساوی $f(x^۲)-۴f^۲(x+۱)=۳x+k$ برقرار است. مقدار k کدام است؟

$f(x)=ax+b$ $\begin{cases} f(x^2)=ax^2+b \\ f(x+1)=a(x+1)+b \end{cases}$

۱) $-\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۱۶}$ ۳) $-\frac{۴۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۴۳}{۴}$

$$ax^2+b-4(ax+a+b)^2=3x+k$$

$$ax^2+b-4a^2x^2-4(a+b)^2-8a(a+b)x=3x+k$$

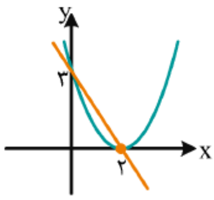
$$(a-4a^2)x^2+(-8a^2-8ab)x+b-4(a+b)^2=3x+k$$

$a-4a^2 \rightarrow 0 < \frac{1}{4}$, 0 ✗

$-8a^2-8ab=3 \rightarrow b=-\frac{7}{4}$ ✓

$-\frac{7}{4}-4\cdot\frac{9}{16}=-\frac{7}{4}-\frac{9}{4}=$

۴- در شکل مقابل، نمودار تابع خطی f و تابع درجه دوم g رسم شده است. مقدار $f(g(۴))$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$f(x)=ax+b$, $b=3$, $a=-\frac{3}{2}$

$f(x)=-\frac{3}{2}x+3$

$g(x) \Rightarrow S\,\Big|\,{}^{2}_{0}$ $(0,3)$ $\begin{cases} K(x-\alpha)^2+\beta \\ S\,\Big|\,{}^{\alpha}_{\beta} \end{cases}$

$g(x)=K(x-2)^2+\cancel{0}$

$g(0)=3=K(4) \rightarrow 4K=3 \rightarrow K=\frac{3}{4}$

$g(x)=\frac{3}{4}(x-2)^2 \rightarrow g(4)=3 \rightarrow f(3)=-\frac{9}{2}+\frac{6}{2}$

$a^2+4a=2a^2 \quad 4a=a^2 \quad a=0 \quad a=4$

$x^2+4x \quad x\geq 4$, $2x^2 \quad x\leq 4$ $\rightarrow f(1)=2$

$x^2+4x \quad x\geq 0$, $2x^2 \quad x\leq 0$ $\rightarrow f(1)=5$

۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & x\geq a \\ 2x^2 & x\leq a \end{cases}$ تابع باشد، مجموع مقادیر ممکن $f(1)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۶- برد تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+(2m^2-4)x+4 & x\leq 2 \\ -x^2+(2m^2+4)x-6 & x>2 \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}$ است. مجموعهٔ مقادیر ممکن $|m|$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $(0,1]$ ۴) $[1,2]$

$x=-\frac{b}{2a} \rightarrow 2-m^2$ $\quad y=-\frac{\Delta}{4a}=-m^4+4m^2$

$x=2+m^2$ $\quad y=m^4+4m^2-2$

$-m^4+4m^2\leq m^4+4m^2-2 \rightarrow m^4\geq 1 \quad |m|\geq 1$

۷- در کدام‌یک از رابطه‌های زیر، y تابعی از x با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است؟

۱) $y-[y]=x$ ۲) $y-\frac{1}{2}[y]=x$

۳) $y+\frac{1}{2}[y]=x$ ۴) $y-2[y]=x$

$2y-[y]=1 \quad y=1 \quad y=\frac{1}{2}$

$y+\frac{1}{2}[y]=-\frac{1}{2}$

$2y+[y]=-1$

$y=\frac{-1-[y]}{2}$

$y-[y]=\frac{-1-3[y]}{2}$

$0\leq a-[a]<1 \rightarrow 0\leq\frac{-1-3[y]}{2}<1 \rightarrow -1<[y]\leq-\frac{1}{3}$

۸- دامنهٔ تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2-(m+2)x+2m} & x\geq 3 \\ \frac{1}{x^2-(m-2)x-2m} & x\leq -3 \end{cases}$ برابر $\mathbb{R}-(-3,3)$ است. m چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

$(x-2)(x-m)=0 \quad 2, m$

$(x+2)(x-m)=0 \quad m, -2$

$-3<m<3$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

۹- برد تابع $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+x}$ برابر $\mathbb{R}-\{a,b\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$D_f=\mathbb{R}-\{0,-1\}$

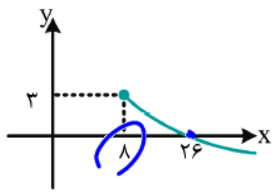
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

$x(x+1)$

$f(x)=\frac{x+1+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+2}{x(x+1)}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}=\frac{2}{x}$

$-1 \rightarrow -2 \quad 0$

۱۰- نمودار تابع $f(x)=a+b\sqrt{cx-1}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f(16)$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

$cx-1\geq 0 \to 8c-1\geq 0 \to c\geq\frac{1}{8}$ ✓

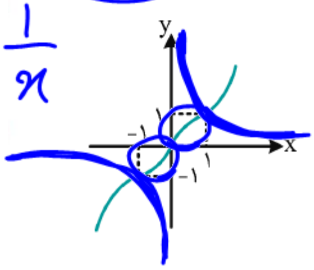
$c=\frac{1}{8}$

$(8,3) \to \boxed{3=a}+\cancel{b}\sqrt{\frac{1}{8}\times 8-1}$

$(26,0) \to 0=3+b\sqrt{\frac{1}{8}(26)-1} \Rightarrow$

$0=3+b\sqrt{\frac{9}{4}}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{3b}{2}=-3$ $\quad b=-2$

۱۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است مجموعهٔ اعداد صحیحی که در دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)-1}$ قرار ندارند، چند عضوی است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) این مجموعه نامتناهی است.

$xf(x)-1\geq 0$ $\quad (0,1)$

$xf(x)\geq 1 \to f(x)\geq\frac{1}{x}$ $\quad x>0$

$xf(x)\geq 1 \to f(x)\leq\frac{1}{x}$ $\quad x<0$

$(-1,0)$

صفر

✓ $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$

۱۲- اگر $\left[\frac{۲}{۳}x\right]=۴$ مجموع مقادیر ممکن برای $\left[\frac{۳}{۲}x\right]$ کدام است؟

۱) ۱۹
۲) ۲۲
۳) ۳۰
۴) ۳۲

$\times\frac{3}{2}$

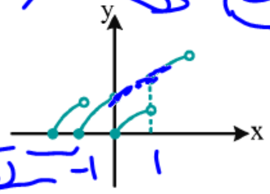
$4\leq\frac{2}{3}x<5 \to 6\leq x<\frac{15}{2}$

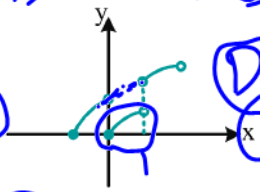
$\times\frac{3}{2} \to 9\leq\frac{3}{2}x<\frac{45}{4}$ $\quad 11/\sim \to 9,10,11$

۱۳- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}-\sqrt{۲-[x]^۲}$ کدام است؟

$x+2\geq 0 \to x\geq -2$

$2-[x]^2\geq 0 \to 2\geq[x]^2 \to -\sqrt{2}\leq[x]\leq\sqrt{2} \to -1,\ 0,\ 1$

۱)


۲)


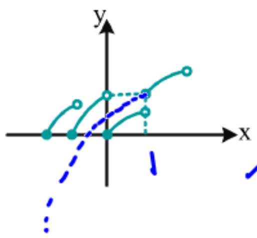
$D=-1\leq x<2$

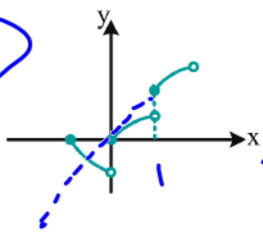
تعریف نشده

$-1\leq x<0$: $\sqrt{x+2}-1$

$0\leq x<1$: $\sqrt{x+2}-\sqrt{2}$

$1\leq x<2$: $\sqrt{x+2}-1$ ✓

۳)


۴)


$f(x-1) = f(x) + 1$

۱۴- اگر $f(x)=x-۲[x]$، تابع $g(x)=\dfrac{f(x-۱)+f(x+۱)}{f(x-۱)-f(x+۱)}$ با کدام تابع برابر است؟

۱) $-f(x)$ ۲) $-\frac{۱}{۲}f(x)$ ۳) $\frac{۱}{۲}f(x)$ ۴) $f(x)$

$f(x+1) = x+1-۲[x+1] = x-۲[x]-1 \Rightarrow f(x+1) = f(x)-1$

$$\frac{f(x)+1+f(x)-1}{f(x)+1-f(x)+1} = \frac{۲f(x)}{۲} = f(x)$$

۱۵- تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۶-x}$ با دامنهٔ $[۲,۶]-\{a\}$ و تابع $g(x)=\dfrac{bx+c}{\sqrt{x-۲}-\sqrt{۶-x}}$ با هم برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

$x \geq ۲$, $۶ \geq x$, $R - \{$ ریشه $\}$

$\sqrt{x-۲} = \sqrt{۶-x} \to x = ۴$ ریشه, $a=۴$

$$\frac{bx+c}{\sqrt{x-۲}-\sqrt{۶-x}} \times \frac{\sqrt{x-۲}+\sqrt{۶-x}}{\sqrt{x-۲}+\sqrt{۶-x}} = \frac{(bx+c)(\sqrt{x-۲}+\sqrt{۶-x})}{۲x-۸}$$

$bx+c = ۲x-۸$ $b=۲$ $c=-۸$ $a=۴$

۱۶- تابع $f(x)=\dfrac{۲x+\sqrt{۱-x^۲}}{[x]+[-x]+۱}$ با تابع $g=\{(a,۲),(b,۱),(-۱,c)\}$ برابر است. مقدار $c-a+b$ کدام است؟

$\neq 0$

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) ۲

$1-x^۲ \geq 0$
$-1 \leq x \leq 1$

$[x]+[-x] \neq -1$ $x \in Z$

-1 0 1

$f(-1) = \frac{-۲}{1} = -۲ \to c = -۲$

$f(0) = 1 \to b = 0$

$f(1) = ۲ \to a = 1$

$-۲-1+0 = -۳$

۱۷- نمودار تابع $f(x)=۲x^۲-۳x$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، سپس طول نقاط نمودار به دست آمده را نصف و عرض آن‌ها را دو برابر می‌کنیم. اگر نمودار به دست آمده را یک واحد به راست منتقل کنیم، ضابطهٔ تابعی که نمودار آن رسم شده است، کدام است؟

y

۱) $y=۱۶x^۲-۲۰x+۴$ ۲) $y=۱۶x^۲-۴x-۲$

۳) $y=۱۶x^۲+۲۸x+۱۰$ ۴) $y=۱۶x^۲+۴۴x+۲۸$

$f(x) \to f(-x)$

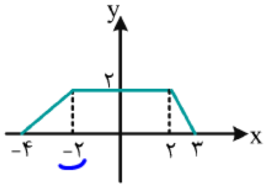
$f(-x) \to f(-۲x)$

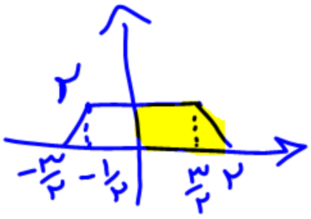
$f(-۲x) \to ۲f(-۲x)$

$۲f(-۲x) \to ۲f(-۲(x-1)) = ۲f(-۲x+۲)$

$۲(۲(-۲x+۲)^۲-۳(-۲x+۲)) = ۱۶x^۲-۲۰x+۴$

۱۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. مساحت ناحیهٔ محصور به نمودار تابع $g(x)=f(2x-1)$ و بالای محور طول‌ها و سمت راست محور عرض‌ها کدام است؟





۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

② مقدم ① مقدم

$f(x) \to f(2x-1)$

$\xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}} f(x-1) \xrightarrow{\text{نصف کردن طول نقاط}} f(2x-1)$

$$\frac{(\frac{3}{2}+2)\times 2}{2} = \frac{7}{2}$$

۱۹- نمودار تابع $y=\sqrt{4-x}$ را k واحد به سمت بالا و k واحد به چپ منتقل می‌کنیم $(k>0)$. اگر نمودار به دست آمده از نقاط $(\frac{3}{2},a)$ و $(a,\frac{3}{2})$ عبور کند، مقدار k کدام است؟

$+k$

$y = \sqrt{4-(x+k)} + k$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

$(\frac{3}{2},a) \to \sqrt{\frac{5}{2}-k} + k = a \to k < \frac{5}{2}$

$(a,\frac{3}{2}) \to \sqrt{-a+4-k} = \frac{3}{2} - k \to k < \frac{3}{2}$

$a = -k^2 + 2k + \frac{7}{4} \to 0 < k < \frac{3}{2}$

۲۰- نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم. سپس طول نقاط نمودار به دست آمده را سه برابر می‌کنیم. نمودار نهایی را چند واحد به سمت بالا منتقل کنیم، تا با نمودار تابع f فقط یک نقطهٔ مشترک داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) امکان‌پذیر نیست.

$f(x) \to -f(x) \to -f(\frac{x}{3}) \to -f(\frac{x}{3})+k$

$$\frac{2x-1}{x+1} = -\frac{\frac{2x}{3}-1}{\frac{x}{3}+1} + k \to \frac{2x-1}{x+1} + \frac{2x-3}{x+3} = k$$

$(k-4)x^2 + 4(k-1)x + 3k+6 = 0$

-1

-3

حالت ۱: $\Delta = 0$; $4k^2 - 8k + 112 = 0$ ✗

حالت ۲: ضریب x^2 = 0 $\to k-4=0$; $k=4$

$12x + 18 = 0$