

۲۱- اگر α و β دو عدد گنگ و عدد $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}$ عددی گویا باشد، آن گاه عدد $3\alpha + 2\beta$ عددی و عدد $2\alpha + 3\beta$ عددی

است.

(۱) گنگ-گنگ

(۲) گویا-گویا

(۳) گویا-گنگ

(۴) گنگ-گویا

$$\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{3} \rightarrow 3\alpha = -2\beta \rightarrow \beta = -\frac{3}{2}\alpha$$

$$3\alpha - \alpha + 3\beta = \beta - \alpha \rightarrow -\frac{3}{2}\alpha - \alpha = -\frac{5}{2}\alpha$$

۲۲- در مورد سه مجموعه ناتهی A، B و C کدام رابطه با مثال نقض رد نمی شود؟

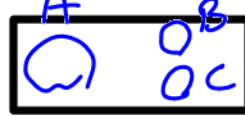


$A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ (X)



$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ (X)

$A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$ (X)



$A - B = A - C \Rightarrow B = C$ (X)

۲۳- عدد $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ مثال نقض مناسبی برای رد کردن حکم زیر است. ضابطه $f(x)$ کدام می تواند باشد؟

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

«اگر x گنگ باشد، آن گاه $f(x)$ هم گنگ است.»

$f(x) = x^2 - x + 5$ (۲)

$f(x) = 2x^2 - x + 1$ (۱)

$f(x) = 3x^2 - x + 2$ (۴)

$f(x) = x^2 - 5x + 1$ (۳)

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

۲۴- فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ و گزاره q به صورت زیر تعریف شده باشد. با کدام گزاره هم ارز است؟

$a=1 \quad b=1$ « $5a+3b$ عدد زوج می باشد: q»

(۲) a^2+b^2 زوج است. (X)

(۱) ab زوج است. (X)

(۴) $2a+5b$ زوج است. (X)

(۳) $3a+4b$ زوج است. (X)

۳۵- فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند. در اثبات نامساوی زیر به روش بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

$\checkmark x^2 + y^2 \geq x + y - \frac{1}{2}$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2 + y^2) \geq 0$ (۱) ~~X~~

$(x-y+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$ (۴)

$(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ (۲) ~~X~~

$(x+y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$ (۳)

$(t-1)^2 + t^2 - 2t + 1 + x^2 + y^2 - 2xy$

$= x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 + x^2 + y^2 - 2xy$

۳۶- به ازای چند عدد طبیعی n از مجموعه $A = \{20, 21, 22, \dots, 100\}$ عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{9}$ زوج است؟

$\left(\frac{n(n+1)}{3}\right)^2$ زوج

$n = 3k$

$20 \leq 3k \leq 100 \Rightarrow 7 \leq k \leq 33$

$n+1 = 3k \Rightarrow n = 3k - 1$

$20 \leq 3k - 1 \leq 100 \Rightarrow 7 \leq k \leq 33$

۲۷ (۱)
 ۵۲ (۲)
 ۵۴ (۳)
 ۲۷ (۴)

۳۷- کدام یک از احکام زیر فاقد مثال نقض است؟

$n = 4$

حاصل ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، عددی گنگ است. ~~X~~

به ازاء هر عدد طبیعی مانند n ، حداقل یکی از اعداد $2^n - 1$ یا $2^n + 1$ اول است. ~~X~~

عدد $2^{2n} + 1$ به ازاء همه اعداد طبیعی n ، عددی اول است. ~~X~~

هیچ دو عدد طبیعی مانند a و b در رابطه $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ صدق نمی‌کنند. (۴)

۳۸- اگر a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 همان اعداد ولی با ترتیب دیگری باشند، چه تعداد از عبارات‌های زیر قطعاً زوج هستند؟

• $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ فرد

• $3a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 = 3a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3$ فرد

• $(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)^2(a_1 - b_1)$ فرد

• $a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$ فرد

فرد $a_1 - b_1$
فرد $a_2 - b_2$
فرد $a_3 - b_3$

~~$(a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = A - A = 0$~~

$a_1 \quad 2$
 $a_2 \quad 2$
 $a_3 \quad 1$

$b_1 \quad 1$
 $b_2 \quad 2$
 $b_3 \quad 2$

۳ (۳)

۳۹- اگر $ab = (3n+1)^m + (3n+2)^m$ باشد، آن‌گاه عبارت $a^2 + b^2$ چگونه است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

$n=1 \quad a=4 \quad b=9$
 $ab=9$
 1×9
 $3 \quad 3$

فرد + فرد = زوج

همواره زوج (۱)
همواره اول (۳)

همواره فرد (۲)
گاهی زوج و گاهی فرد (۲)

$a^2 + b^2 =$ فرد

۴۰- در اثبات نامساوی $a^2 + b^2 + k^3 \geq a + ab + b$ به روش اثبات بازگشتی، حداقل مقدار k برای این‌که به یک رابطه بدیهی برسیم و تمامی مراحل برگشت پذیر باشند، کدام است؟

$a^2 + b^2 - a - b - ab + k^3 \geq 0$

$(a-1)^2 + (b-1)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$

$k^3 = 1$

۱ (۱)
 $\sqrt{2}$

در آموزش